

Univerzitet u Sarajevu
Prirodno-matematički fakultet
Odsjek za fiziku
I ciklus studija Opći smjer/Teorijska fizika

TOTALNA REFLEKSIJA –
GOOS-HÄNCHEN POMAK

ZAVRŠNI RAD

Mentor:
doc. dr Azra Gazibegović-Busuladžić

Kandidat:
Amina Alić

Sarajevo, 2015.

Sažetak

Valni paket koji se totalno reflektuje na granici između dva dielektrika općenito podliježe Goos - Hänchen pomaku. Eksperimentalna potvrda i razmatranje ovog fenomena prvi put je izložena u radu [1]. U ovom radu razmatraju se dva različita teorijska pristupa za objašnjenje ovog fenomena. Jedan je metod stacionarne faze a drugi je konvencionalni metod energetskega fluksa. Između ova dva pristupa postoji određeno neslaganje u krajnjem rezultatu. Ukratko je obrazložen noviji metod energetskega fluksa [2, 3], koji daje popravku konvencionalnog metoda. U radu se uzima u obzir elektromagnetna priroda svjetlosti. Pomoću Maxwellovih jednačina i graničnih uslova pri prelasku svjetlosti između dva dielektrika izvode se Fresnelove jednačine. One daju osnovu za fizikalno objašnjenje Goos - Hänchen pomaka. Razmatra se totalna unutrašnja refleksija i uvodi pojam isčezavajućeg vala. Navode se i neke primjene Goos - Hänchen pomaka.

Abstract

A wave packet reflected totally on a boundary between two dielectrics generally undergo the Goos - Hänchen shift. Experimental confirmation and consideration of this phenomenon is presented in paper [1] for the first time. In this paper two different theoretical approaches are considered to explain this phenomenon. One is the stationary-phase method and the other one is the conventional energy-flux method. Between these two approaches, there are some disagreement in the final outcome. The new energy flux method [2, 3], which provides a repair of the conventional methods is briefly explained. This paper also takes into account the electromagnetic nature of light. Fresnel equations are derived from Maxwell's equations and the boundary conditions for the transition of light between two dielectrics. They provide base for physical explanation of Goos - Hänchen shift. Total internal reflection is considered, and the concept of the evanescent wave is introduced. Some of the applications of Goos - Hänchen shift are also mentioned.

Sadržaj

1	Uvod	9
2	Elektromagnetna teorija svjetlosti	13
2.1	Valna jednačina	13
2.2	Ravni val	14
2.3	Ravni harmonijski val	15
2.4	Valni vektor	15
2.5	Kompleksna reprezentacija ravnog vala	16
2.6	Ravni elektromagnetni val	16
2.7	Polarizacija elektromagnetnog vala	17
2.8	Gustoća energetskega fluksa	18
2.9	Maxwellove jednačine za dielektrik	19
3	Fresnelove jednačine	21
3.1	Vektor električnog polja okomit na upadnu ravan	22
3.2	Vektor električnog polja paralelan upadnoj ravni	24
4	Totalna unutrašnja refleksija	27
5	Goos - Hänchen pomak	31
5.1	Metod stacionarne faze	31
5.2	Metod energetskega fluksa	35
5.2.1	Vektor električnog polja okomit na upadnu ravan	36
5.2.2	Vektor električnog polja paralelan upadnoj ravni	39
5.3	Novi metod energetskega fluksa	41
5.3.1	Vektor električnog polja okomit na upadnu ravan	43
5.3.2	Vektor električnog polja paralelan upadnoj ravni	44
6	Primjene	47
6.1	Dielektrični valovodi	47
6.2	Fluorescencija totalnom unutrašnjom refleksijom	48

8

SADRŽAJ

7 Zaključak

53

A Matematički dodatak

55

Poglavlje 1

Uvod

Prvu teoriju svjetlosti - korpuskularnu teoriju - uveo je Sir Isaac Newton. Prema ovoj teoriji, svijetla tijela emituju energiju u obliku čestica (korpuskula), koje se dalje prostiru po pravim linijama. Kada čestice dopiju do oka, one djeluju na retinu tako da izazivaju osjećaj viđenja. Korpuskularna teorija je uspješno objasnila pravolinijsko prostiranje svjetlosti, zašto se svjetlost od ravne površine, kao što je ogledalo, odbija pod uglom koji je jednak upadnom, te prelamanje svjetlosti na graničnoj površini.

Korpuskularna teorija je bila općeprihvaćena sve do sredine 1670. godine kada je Christian Huygens pokazao da se odbijanje i prelamanje svjetlosti može objasniti pomoću valne teorije, te da ova teorija daje objašnjenje za novootkrivenu pojavu dvojnog prelamanja, koju korpuskularna teorija nije mogla objasniti. Ipak valna teorija nije bila odmah dobro prihvaćena. Jedan od prigovora bio je da bi se savijanje svjetlosti trebalo vidjeti oko uglova, jer se talasi mogu savijati oko prepreka. Takvu pojavu, danas poznatu kao difrakcija, to jest savijanje svjetlosti oko rubova nekog predmeta, uočio je Grimaldi 1665. godine ali je njegov rad prošao nezapaženo. Sada je poznato da se savijanje svjetlosti obično ne zapaža zato što svjetlost ima kratke valne dužine.

Valna teorija svjetlosti dobila je svoju potvrdu tek u 19. stoljeću u eksperimentima o interferenciji Thomasa Younga i Augustina Fresnela. Young je uspio izmjeriti valnu dužinu svjetlosti a Fresnel je pokazao da se pravolinijsko prostiranje, ali i difrakcione pojave, mogu objasniti ponašanjem valova male valne dužine.

Bez obzira na postignuća u istraživanju svjetlosti, priroda svjetlosnih valova kao i sredine kroz koju se prostiru, i dalje je bila neriješen problem. Huygens je izmislio prenosnu sredinu - etar - koji bi ispunjavao cijeli prostor. Kada bi svjetlosni valovi bili elastični, kao na primjer zvučni valovi, etar bi morao biti izuzetno čvrst da bi se objasnila velika brzina prostiranja svjet-

losti, ali to je bilo kontradiktorno sa činjenicom da se etar ne opire kretanju tijela. Pri tome je izuzetno čvrst materijal onaj koji ima velik Youngov modul elastičnosti E , što je u skladu sa Hookeovim zakonom

$$\frac{\Delta L}{L} = \frac{\sigma}{E},$$

gdje je $\frac{\Delta L}{L}$ promjena dužine a σ opterećenje.

Slijedeći veliki korak u objašnjenju prirode svjetlosti dao je James Clark Maxwell. Maxwell je 1862. godine teoretski predvidio postojanje elektromagnetnih valova kao posljedicu jednačina elektromagnetnog polja. Brzina elektromagnetnih valova u vakuumu je izračunata kao $\frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}}$. Numerička vrijednost ove konstante ($3,1 \times 10^8 \frac{m}{s}$) dobijena je ranije i praktično se podudarala sa brzinom svjetlosti u vakuumu koju je izmjerio Fizeau 1849. godine. Slijedeća važna sličnost između osobina elektromagnetnih valova i svjetlosti jeste transverzalna priroda valova. Maxwellove jednačine pokazuju da su elektromagnetni valovi transverzalni valovi, a Young 1817. godine zaključuje da polarizacija i parcijalna refleksija sugeriraju transverzalnu prirodu svjetlosti. Ove dvije činjenice navele su Maxwella na zaključak da je svjetlost elektromagnetni val.

Postojanje elektromagnetnih valova eksperimentalno je dokazao Heinrich Hertz 1888. godine, kada je proizveo valove valne dužine oko 66 cm. Pomoću metalnog stakla Hertz je posmatrao prelamanje i odbijanje ovih valova, proučavao njihovu polarizaciju te dobio stojeći val, dokazujući njihovu sposobnost da interferiraju.

Maxwellova elektromagnetna priroda svjetlosti i njena eksperimentalna potvrda od strane Hertza predstavljale su veliko postignuće u fizici, te se krajem 19. vijeka vjerovalo da malo šta treba da se doda shvatanju prirode svetlosti.

Pokazalo se da nije tako. Kao i druge oblasti fizike i proučavanje svjetlosti je doživjelo prevrat početkom 20. stoljeća.

1900. godine Max Planck je predložio ideju da se energija emituje u kvantima. Tu ideju Albert Einstein je 1905. godine proširio i postulirao da je energija svjetlosnog snopa koncentrisana u male pakete koji su nazvani fotoni. To je bilo opasno približavanje korpuskularnoj teoriji koja je davno odbačena, te Einsteinova ideja nije naišla na dobar prijem. Valna priroda se u njegovoj ideji zadržala jedino u tome što je energija fotona proporcionalna njegovoj frekvenciji. Einstein je pomoću ove ideje objasnio fotoelektrični efekt. Millikanovi eksperimenti su pokazali da se kinetička energija fotoelektrona slaže sa Einsteinovom formulom za fotoelektrični efekt. Ni to nije bilo dovoljno da naučnici prihvate ono što se činilo kao povratak korpuskularnoj

teoriji svjetlosti, obzirom da je valna teorija bila jako uspješna. Konačnu potvrdu Einsteinovom gledištu dao je Comptonov efekt.

Danas je poznato da svjetlost ima dualnu prirodu, s tim da se prostiranje svjetlosti bolje objašnjava elektromagnetnom teorijom, dok se interakcija svjetlosti sa materijom bolje objašnjava korpuskularnom teorijom [4].

Poglavlje 2

Elektromagnetna teorija svjetlosti

2.1 Valna jednačina

Elektromagnetna teorija svjetlosti zasniva se na Maxwellovim jednačinama [5]. U odsustvu struja ($j = 0$) i naboja ($\rho = 0$), Maxwellove jednačine u vakuumu su:

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \quad (2.1)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (2.2)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad (2.3)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 0. \quad (2.4)$$

Pri tome definišemo vektor dielektričnog pomaka \vec{D} sa:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}, \quad (2.5)$$

a vektor magnetne indukcije¹ \vec{B} sa:

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H}, \quad (2.6)$$

gdje su ϵ_0 i μ_0 električna permitivnost i magnetna permeabilnost vakuuma respektivno. Uveden je operator:

$$\vec{\nabla} = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z}. \quad (2.7)$$

¹U nekoj literaturi se \vec{B} naziva magnetnim poljem a \vec{H} magnetizirajućim poljem.

Iz ovih jednačina dobijamo valnu jednačinu za \vec{B} :

$$\nabla^2 \vec{B} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0, \quad (2.8)$$

i valnu jednačinu za \vec{E} :

$$\nabla^2 \vec{E} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0, \quad (2.9)$$

gdje je $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$ brzina svjetlosti u vakuumu.

2.2 Ravni val

Valna jednačina ima važnu ulogu u fizici. Za skalarnu funkciju Φ valna jednačina je:

$$\nabla^2 \Phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0. \quad (2.10)$$

Opće rješenje ove jednačine za slučaj kada Φ zavisi samo od jedne Descartesove koordinate, recimo $\Phi = \Phi(z, t)$, je

$$\Phi(z, t) = \Phi_1(z + ct) + \Phi_2(z - ct). \quad (2.11)$$

Zanima nas fizikalno značenje ovog rješenja. Pogledajmo prvo rješenje:

$$\Phi = \Phi_2(z - ct). \quad (2.12)$$

Argument funkcije Φ u tački z u trenutku t podudara se sa argumentom te funkcije u tački $z + \Delta z$ u trenutku $t + \Delta t$ ako je $\Delta z = c\Delta t$. Odatle je brzina vala data sa $v = \frac{\Delta z}{\Delta t} = c$. Funkcija $\Phi = \Phi_2(z - ct)$ opisuje val proizvoljnog oblika koji se kreće u pozitivnom smjeru z -ose brzinom v . Oblik vala i Φ_2 u svakoj tački ostaju nepromijenjeni. Fizikalno značenje funkcije:

$$\Phi = \Phi_1(z + ct) \quad (2.13)$$

je isto, s tim da se u ovom slučaju val kreće u negativnom smjeru z -ose a Φ_1 ostaje nepromijenjeno. Val opisan formulom (2.11) predstavlja superpoziciju dva vala koji se kreću u suprotnom smjeru. Najjednostavniji slučaj jeste stojeći val, a opći slučaj je elektromagnetni val sa kompleksnim komponentama. Za fiksirane vrijednosti z i t , vrijednosti funkcije Φ su konstantne u ravni okomitoj na z -osu. Zbog toga se ovaj val zove ravni val.

2.3 Ravni harmonijski val

Ako su Φ_1 i Φ_2 harmonijske funkcije, onda se prethodno opisan val zove harmonijski val. Dakle, val opisan funkcijom:

$$\Phi(z, t) = A \cos \omega \left(t - \frac{z}{c} \right), \quad (2.14)$$

zove se ravni *harmonijski val* a prostire se u pozitivnom smjeru z ose. Konstanta A je amplituda vala a ω je frekvencija vala. Ravni harmonijski val se može predstaviti preko funkcije sinus a u općem slučaju ravni harmonijski val koji se prostire u pozitivnom smjeru z -ose je:

$$\Phi(z, t) = A \cos \omega \left(t - \frac{z}{c} \right) + B \sin \omega \left(t - \frac{z}{c} \right). \quad (2.15)$$

Argument harmonijske funkcije je faza vala. Val čije su površine konstantne faze ravni, zove se ravni val. Uzimajući u obzir da je:

$$\lambda = cT = \frac{2\pi c}{\omega} \quad (2.16)$$

jednačinu (2.14) možemo pisati u obliku:

$$\Phi(z, t) = A \cos \left(\omega t - \frac{\omega z}{c} \right) = A \cos (\omega t - kz), \quad (2.17)$$

gdje je $k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}$ valni broj.

2.4 Valni vektor

Uvedimo vektor \vec{k} koji ima intenzitet jednak valnom broju k i smjer prostiranja paralelan pozitivnom smjeru z -ose. Takav vektor zove se valni vektor. Uzimajući u obzir da je $\vec{k} \cdot \vec{r} = k \cdot z$, jednačinu (2.17) možemo pisati u slijedećem obliku:

$$\Phi(\vec{r}, t) = A \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}). \quad (2.18)$$

Ova jednačina ne zavisi od koordinatnog sistema i karakteriše ravni val koji se prostire u smjeru valnog vektora \vec{k} . Ravni val možemo napisati i pomoću funkcije sinus:

$$\Phi'(\vec{r}, t) = A' \sin(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}). \quad (2.19)$$

Kako je $\sin(\alpha + \frac{\pi}{2}) = \cos(\alpha)$ pogodnim izborom početnog trenutka formula (2.19) se svodi na (2.18).

2.5 Kompleksna reprezentacija ravnog vala

Korištenjem Eulerove formule

$$e^{i\alpha} = \cos(\alpha) + i \sin(\alpha), \quad (2.20)$$

formule (2.18) i (2.19) možemo pisati kao:

$$\Phi(\vec{r}, t) = A \operatorname{Re} \left(e^{-i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} \right), \quad (2.21)$$

$$\Phi'(\vec{r}, t) = A' \operatorname{Im} \left(e^{-i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} \right), \quad (2.22)$$

gdje su Re i Im realni i imaginarni dio kompleksnog broja. Pri proračunu obično se koristi kompleksna reprezentacija ravnog vala u obliku:

$$\Phi(\vec{r}, t) = A \left(e^{-i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} \right), \quad (2.23)$$

pri čemu se realni i imaginarni dio označavaju istim simbolom. Veličina A u (2.23) može biti realna, imaginarna ili kompleksna. U općem slučaju vrijedi:

$$\begin{aligned} A &= |A| e^{i\phi}, \\ \tan(\phi) &= \frac{\operatorname{Im} A}{\operatorname{Re} A}, \end{aligned} \quad (2.24)$$

pa (2.23) možemo pisati kao:

$$\Phi(\vec{r}, t) = |A| \left(e^{-i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} - \phi)} \right), \quad (2.25)$$

gdje je $|A|$ amplituda ravnog vala a $\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} - \phi$ njegova faza.

2.6 Ravni elektromagnetni val

Još jednom, Maxwelllove jednačine su:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad (2.26)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (2.27)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad (2.28)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0. \quad (2.29)$$

Rješenje ovih jednačina ima oblik:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}, \quad (2.30)$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{B}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}, \quad (2.31)$$

gdje su \vec{E}_0 i \vec{B}_0 konstantni vektori koji ne zavise od koordinata i vremena a mogu imati kompleksne komponente. Uvrštavanjem jednačina (2.30) i (2.31) u jednačine (2.26) - (2.29) dobijamo:

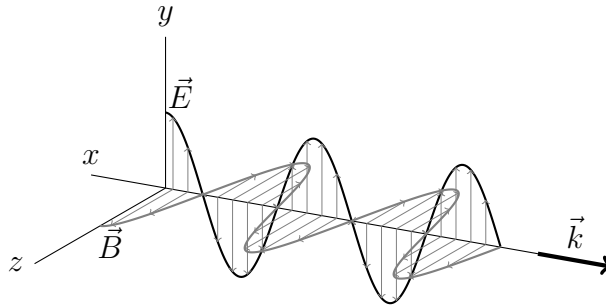
$$-\vec{k} \times \vec{B} = \omega \mu_0 \epsilon_0 \vec{E}, \quad (2.32)$$

$$\vec{k} \times \vec{E} = \omega \vec{B}, \quad (2.33)$$

$$\vec{k} \cdot \vec{B} = 0, \quad (2.34)$$

$$\vec{k} \cdot \vec{E} = 0. \quad (2.35)$$

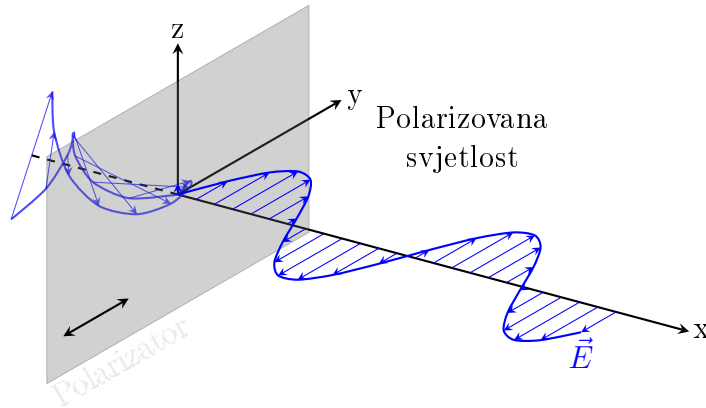
Iz druge dvije jednačine slijedi da su vektori \vec{E} i \vec{B} okomiti na vektor prostiranja vala \vec{k} što znači da je elektromagnetni val transverzalni val. Iz prve dvije jednačine vidimo da su vektori \vec{E} i \vec{B} međusobno okomiti što znači da vektori \vec{E} , \vec{B} i \vec{k} čine desni triedar.



Slika 2.1: Ravni elektromagnetni val.

2.7 Polarizacija elektromagnetnog vala

Za longitudinalne valove svi pravci okomiti na pravac prostiranja vala su ekvivalentni, dok za transverzalne valove to nije slučaj. Elektromagnetni valovi su transverzalni valovi, te njihove osobine zavise od orijentacije vektora \vec{E} i \vec{B} . Ako u procesu prostiranja vala vektor \vec{E} ostaje u istoj ravni paralelnoj pravcu prostiranja, val je tada *linearно polarizovan*.



Slika 2.2: Linearno polarizovan elektromagnetni val.

Polarizator je materijal koji propušta električno polje koje osciluje samo duž određenog pravca i tako od nepolarizovane svjetlosti nakon prolaska kroz polarizator nastaje polarizovana svjetlost. Superpozicijom linearno polarizovanih valova dobije se val koji je kružno ili eliptički polarizovan, ali takve valove nećemo razmatrati u ovom radu. Za elektromagnetni val razlikujemo dva načina linearne polarizacije:

1. TE mod. Ime dolazi od *transversal electric field*, što znači da je svjetlost polarizovana tako da je vektor električnog polja okomit na upadnu ravan.

2. TM mod. Analogno, TM je skraćena za *transversal magnetic field*, te je u ovom slučaju vektor magnetnog polja okomit na upadnu ravan, to jest vektor električnog polja paralelan sa upadnom ravni.

2.8 Gustoća energetskega fluksa

Gustoća energetskega fluksa za elektromagnetno polje data je *Poyntingovim vektorom*:

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}, \quad (2.36)$$

čiji je intenzitet za ravni elektromagnetni val u vakuumu:

$$S = |\vec{S}| = |\vec{E} \times \vec{H}| = |\vec{E}||\vec{H}| = \frac{EB}{\mu_0} = \frac{1}{\mu_0 c} E^2. \quad (2.37)$$

Uzimajući u obzir da je $\frac{1}{\mu_0} = \epsilon_0 c^2$, intenzitet Poyntingovog vektora je:

$$S = c\epsilon_0 E^2. \quad (2.38)$$

Gornje formule sadrže trenutne vrijednosti veličina. Kako je moguće mjeriti samo vrijednosti usrednjene po velikom broju perioda, potrebna je vremenski usrednjena vrijednost Poyntingovog vektora. Uz $E = E_0 \cos(\omega t)$ srednja vrijednost Poyntingovog vektora je:

$$\langle S \rangle_t = c\epsilon_0 E_0^2 \langle \cos^2 \omega t \rangle_t = \frac{1}{2} c\epsilon_0 E_0^2. \quad (2.39)$$

Ako su vektori polja predstavljeni u obliku:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}, \quad (2.40)$$

$$\vec{H} = \vec{H}_0 e^{-i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}, \quad (2.41)$$

gustoća energetskega fluksa je definisana sa:

$$\vec{S} = \text{Re} \vec{E} \times \text{Re} \vec{H}, \quad (2.42)$$

pa je vremenski usrednjen Poyntingov vektor:

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{2} \text{Re}(\vec{E} \times \vec{H}^*). \quad (2.43)$$

2.9 Maxwellove jednačine za dielektrik

Korištenjem Stokesovog teorema:

$$\oint_l \vec{A} \cdot d\vec{l} = \iint_S (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \cdot d\vec{S} \quad (2.44)$$

i jednačina (2.5) i (2.6), Maxwellove jednačine (2.1) i (2.2) se mogu napisati u integralnom obliku:

$$\oint_l \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}, \quad (2.45)$$

$$\oint_l \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt}. \quad (2.46)$$

Korištenjem Gaussovog teorema:

$$\int_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) dV = \oint_S \vec{A} \cdot d\vec{S}, \quad (2.47)$$

jednačine (2.3) i (2.4) postaju:

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0, \quad (2.48)$$

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \sum \frac{Q}{\epsilon_0}. \quad (2.49)$$

Dielektrik ima drugačije električne i magnetne osobine od vakuuma, te će Maxwellove jednačine poprimiti nešto drugačiji oblik. Dielektrični pomak u dielektriku je $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$, gdje je $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$, a vektor magnetne indukcije u dielektriku je $\vec{B} = \mu \vec{H}$, gdje je $\mu = \mu_0 \mu_r$. U dielektriku nema slobodnih naboja ni struja te vrijedi

$$\begin{aligned} \sum \frac{Q}{\epsilon_0} &= 0, \\ \mu_0 \mu_r I &= 0. \end{aligned}$$

Maxwellove jednačine za dielektrik su:

$$\oint_l \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \mu_r \epsilon_0 \epsilon_r \frac{d\Phi_E}{dt}, \quad (2.50)$$

$$\oint_l \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt}, \quad (2.51)$$

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0, \quad (2.52)$$

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0. \quad (2.53)$$

Poglavlje 3

Fresnelove jednačine

Dielektrici, općenito, imaju različite električne permitivnosti. Magnetne osobine većine dielektrika su međusobno jednake, a pri tom je relativna magnetna permeabilnost $\mu_r = 1$. Ponašanje vala na granici dielektrika u potpunosti je određeno graničnim uslovima za vektore polja, koji proizilaze iz Maxwellovih jednačina. Granične uslove za električno polje izvodimo iz jednačina (2.51) i (2.53). U jednačini (2.51) pojavljuje se linijski integral. Pri integraciji po konturi koja obilazi graničnu površ između dielektrika, komponente na stranama se poništavaju u limesu da debljina granice teži nuli, te je prvi granični uslov:

$$E_{h1} = E_{h2}.$$

U jednačini (2.53) rješava se površinski integral te se dobije drugi granični uslov za električno polje:

$$\epsilon_{r1}E_{r1} = \epsilon_{r2}E_{r2}.$$

Granični uslovi za magnetno polje izvode se iz jednačina (2.50) i (2.52) na isti način kao granični uslovi za električno polje. Iz jednačine (2.50), rješavanjem površinskog integrala dobija se prvi granični uslov za magnetno polje:

$$B_{h1} = B_{h2}.$$

Iz jednačine (2.52), rješavanjem linijskog integrala dobija se drugi granični uslov za magnetno polje:

$$B_{v1} = B_{v2}.$$

Dakle, granični uslovi za dielektrike su:

$$E_{h1} = E_{h2}, \tag{3.1}$$

$$\epsilon_{r1}E_{r1} = \epsilon_{r2}E_{r2}, \tag{3.2}$$

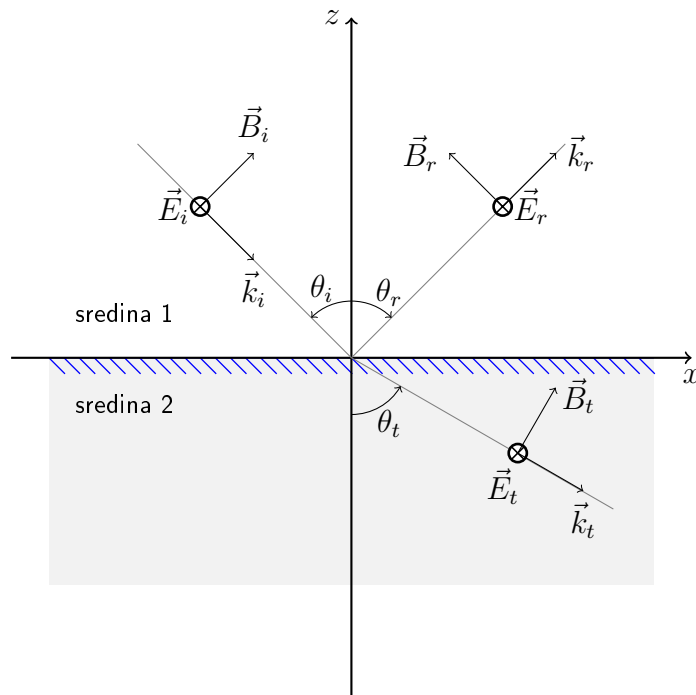
$$B_{h1} = B_{h2}, \quad (3.3)$$

$$B_{v1} = B_{v2}. \quad (3.4)$$

Iz graničnih uslova se izvode Fresnelove jednačine. Fresnelove jednačine daju amplitude reflektovanog (odbijenog) i refraktovanog (prelomljenog, transmitovanog) vala pri prelasku svjetlosti između dvije sredine sa različitim indeksom prelamanja. Opći slučaj kada je vektor električnog polja nagnut pod nekim uglom u odnosu na upadnu ravan, može se razdvojiti na dva slučaja:

1. vektor električnog polja okomit na upadnu ravan,
2. vektor električnog polja paralelan upadnoj ravni.

3.1 Vektor električnog polja okomit na upadnu ravan



Slika 3.1: TE mod svjetlosti

Pretpostavimo da električno polje ne mijenja smjer. Vektor električnog polja je okomit na upadnu ravan a paralelan sa granicom između dielektrika, što znači da ga nije potrebno razdvajati na komponente. Vektori magnetnog polja su \vec{B}_i za upadni val, \vec{B}_r za reflektovani (odbijeni) val i \vec{B}_t za refraktovani

(transmitovani, prelomljeni) val. Svaki od ovih valova ima horizontalnu i vertikalnu komponentu. Komponente magnetnog polja upadnog vala su:

$$B_{hi} = B_i \cos \theta_i,$$

$$B_{vi} = B_i \sin \theta_i,$$

Analogno vrijedi za reflektovani i refraktovani val. Za izvođenje Fresnelovih jednačina koriste se uslovi (3.1) i 3.3):

$$E_i + E_r = E_t, \quad (3.5)$$

$$B_i \cos \theta_i + B_r \cos \theta_r = B_t \cos \theta_t. \quad (3.6)$$

Indeks prelamanja prve sredine je n_1 a druge sredine je n_2 . Veza između B i E je:

$$B = \frac{E}{v} = E \frac{n}{c}.$$

Također vrijedi:

$$\cos \theta_i = -\cos \theta_r, \quad (3.7)$$

pa dobijamo:

$$n_1 \cos \theta_i \left(\frac{E_i}{c} - \frac{E_r}{c} \right) = n_2 \cos \theta_t \frac{E_t}{c}. \quad (3.8)$$

Skraćivanjem jednačine dobijamo:

$$n_1 \cos \theta_i (E_i - E_r) = n_2 \cos \theta_t E_t. \quad (3.9)$$

Uvrštavanjem jednačine (3.5) u jednačinu (3.9) dobijamo:

$$n_1 \cos \theta_i (E_i - E_r) = n_2 \cos \theta_t (E_i + E_r). \quad (3.10)$$

Razdvajanjem članova uz E_i i E_r dobijamo:

$$E_i (n_1 \cos \theta_i - n_2 \cos \theta_t) = E_r (n_1 \cos \theta_i + n_2 \cos \theta_t). \quad (3.11)$$

Tada je amplituda reflektovanog vala:

$$\frac{E_r}{E_i} = \frac{n_1 \cos \theta_i - n_2 \cos \theta_t}{n_1 \cos \theta_i + n_2 \cos \theta_t}. \quad (3.12)$$

Kada iz jednačine (3.5) izrazimo E_r :

$$E_r = E_t - E_i,$$

pa uvrstimo u jednačinu (3.9) dobijemo:

$$n_1 \cos \theta_i (E_i - E_r + E_i) = n_2 \cos \theta_t E_t. \quad (3.13)$$

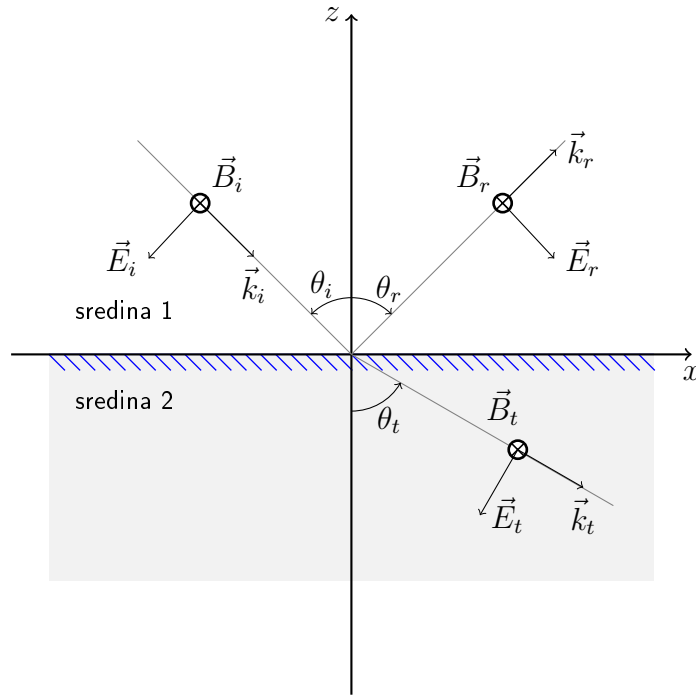
Razdvajanjem članova uz E_i i E_t dobijamo:

$$E_i (n_1 \cos \theta_i + n_1 \cos \theta_i) = E_t (n_1 \cos \theta_i + n_2 \cos \theta_t). \quad (3.14)$$

Amplituda transmitovanog vala je:

$$\frac{E_t}{E_i} = \frac{2n_1 \cos \theta_i}{n_1 \cos \theta_i + n_2 \cos \theta_t}. \quad (3.15)$$

3.2 Vektor električnog polja paralelan upadnoj ravni



Slika 3.2: TM mod svjetlosti.

U ovom slučaju pretpostavljamo da vektor magnetnog polja ne mijenja smjer, a vektor električnog polja, koji je paralelan sa upadnom ravni ali je okomit na granicu, razdvajamo na horizontalnu i vertikalnu komponentu. Korištenjem graničnih uslova (3.1) i (3.3) dobijamo:

$$E_i \cos \theta_i + E_r \cos \theta_r = E_t \cos \theta_t, \quad (3.16)$$

$$B_i + B_r = B_t. \quad (3.17)$$

Korištenjem $B = n \frac{E}{c}$ dobijamo:

$$n_1 \frac{E_i}{c} + n_1 \frac{E_r}{c} = n_2 \frac{E_t}{c}. \quad (3.18)$$

Dijeljenjem sa c i n_2 dobijamo:

$$\frac{n_1}{n_2} (E_i + E_r) = E_t. \quad (3.19)$$

Uz (3.7) granični uslov (3.16) je:

$$E_i \cos \theta_i - E_r \cos \theta_i = E_t \cos \theta_t. \quad (3.20)$$

Iz jednačina (3.19) i (3.20) slijedi:

$$E_i \cos \theta_i - E_r \cos \theta_i = \frac{n_1}{n_2} (E_i + E_r) \cos \theta_t. \quad (3.21)$$

Množenjem sa n_2 , te razdvajanjem članova uz E_i i E_t dobijamo izraz za amplitudu reflektovanog vala svjetlosti paralelne upadnoj ravni:

$$\frac{E_r}{E_i} = \frac{n_2 \cos \theta_i - n_1 \cos \theta_t}{n_2 \cos \theta_i + n_1 \cos \theta_t}. \quad (3.22)$$

Amplitudu transmitovane svjetlosti kroz granicu između dva dielektrika naći ćemo ako iz jednačine (3.19) izrazimo E_r :

$$E_r = \frac{n_2}{n_1} E_t - E_i, \quad (3.23)$$

a zatim taj izraz uvrstimo u jednačinu (3.20):

$$E_i \cos \theta_i - \frac{n_2}{n_1} E_t \cos \theta_i + E_i \cos \theta_i = E_t \cos \theta_t. \quad (3.24)$$

Množimo obje strane jednačine (3.24) sa n_1 i razdvajamo članove uz E_i i E_t da dobijemo traženu amplitudu transmitovanog vala:

$$\frac{E_t}{E_i} = \frac{2n_1 \cos \theta_i}{n_1 \cos \theta_t + n_2 \cos \theta_i}. \quad (3.25)$$

Dakle Fresnelove jednačine su:

$$r_{\perp} = \frac{E_r}{E_i} = \frac{n_1 \cos \theta_i - n_2 \cos \theta_t}{n_1 \cos \theta_i + n_2 \cos \theta_t}, \quad (3.26)$$

$$t_{\perp} = \frac{E_t}{E_i} = \frac{2n_1 \cos \theta_i}{n_1 \cos \theta_i + n_2 \cos \theta_t}, \quad (3.27)$$

$$r_{\parallel} = \frac{E_r}{E_i} = \frac{n_2 \cos \theta_i - n_1 \cos \theta_t}{n_2 \cos \theta_i + n_1 \cos \theta_t}, \quad (3.28)$$

$$t_{\parallel} = \frac{E_t}{E_i} = \frac{2n_1 \cos \theta_i}{n_1 \cos \theta_t + n_2 \cos \theta_i}. \quad (3.29)$$

Poglavlje 4

Totalna unutrašnja refleksija

Sada razmatramo prelazak svjetlosti iz optički gušće u optički rjeđu sredinu. Šta znači optički rjeđa ili gušća sredina? Pojam optičke gustoće sredine odnosi se na indeks prelamanja sredine, a indeks prelamanja je odnos između brzine svjetlosti u vakuumu i brzine svjetlosti u datoj sredini (dielektriku)

$$n = \frac{c}{v}.$$

Što je veći indeks prelamanja neke sredine to je ta sredina optički gušća, to jest brzina svjetlosti u njoj je sve manja od one u vakuumu. Dakle sada nas zanima situacija kada je $n_1 > n_2$, gdje indeksi 1 i 2 označavaju sredinu u kojoj se kreću upadni (i odbijeni) i prelomljeni val respektivno. I u ovom slučaju svjetlost se djelimično odbija a djelimično prelama ali to se dešava samo do kritičnog ugla θ_c . Za upad pri kritičnom uglu Snellov zakon izgleda ovako:

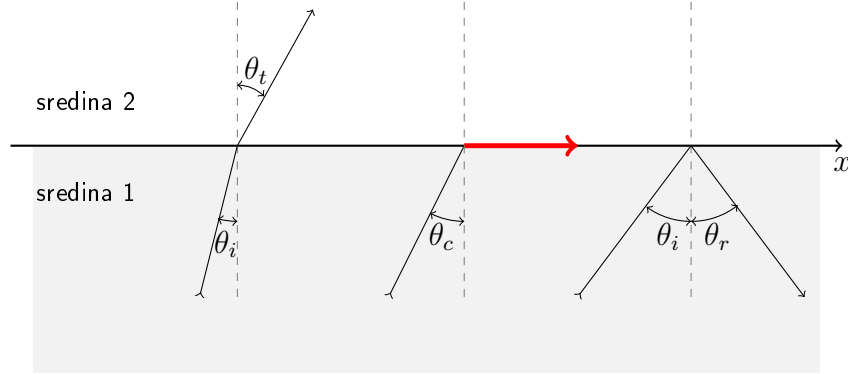
$$n_1 \sin \theta_c = n_2 \sin \frac{\pi}{2}, \quad (4.1)$$

to jest:

$$\sin \theta_c = \frac{n_2}{n_1}. \quad (4.2)$$

Za uglove $\theta_i > \theta_c$ sva svjetlosna energija je reflektovana nazad u upadnu sredinu, što ćemo vidjeti kasnije iz činjenice da je srednja vrijednost gustoće energetskog fluksa transmitovanog vala okomito na granicu između dva dielektrika jednaka nuli, dešava se pojava koja se zove totalna unutrašnja refleksija.

Šta se dešava sa Snellovim zakonom u tom slučaju? Za $\theta_i > \theta_c$ vrijedi $\sin \theta_t > 1$, zato što je $n_1 > n_2$. To znači da nemamo transmitovanog vala i da Snellov zakon više ne vrijedi. Sa ovom činjenicom ne možemo više ispuniti granične uslove jer nam ostaju samo upadni i odbijeni val. Tako nešto nije



Slika 4.1: Totalna unutrašnja refleksija.

moćue, te ćemo razmotriti situaciju kao da transmitovani val postoji ali ćemo uzeti u obzir da je $\sin \theta_t > 1$. Valna funkcija transmitovanog vala je:

$$\vec{E}_t = \vec{E}_{0t} e^{i(\vec{k}_t \cdot \vec{r} - \omega t)}, \quad (4.3)$$

gdje je

$$\vec{k}_t \cdot \vec{r} = k_{tx}x + k_{tz}z, \quad (4.4)$$

$$k_{tx} = k_t \sin \theta_t, \quad (4.5)$$

$$k_{tz} = k_t \cos \theta_t. \quad (4.6)$$

Obzirom da vrijedi:

$$\sin \theta_t = \frac{n_1}{n_2} \sin \theta_i, \quad (4.7)$$

također vrijedi:

$$\cos \theta_t = \pm \sqrt{1 - \frac{n_1^2 \sin^2 \theta_i}{n_2^2}}, \quad (4.8)$$

te jednaćine (4.5) i (4.6) postaju:

$$k_{tx} = k_t \frac{n_1}{n_2} \sin \theta_i, \quad (4.9)$$

$$k_{tz} = \pm k_t \sqrt{1 - \frac{n_1^2 \sin^2 \theta_i}{n_2^2}} = \pm i k_t \sqrt{\frac{n_1^2 \sin^2 \theta_i}{n_2^2} - 1} = \pm i k_t \beta. \quad (4.10)$$

Prema tome valna funkcija transmitovanog vala je:

$$\vec{E}_t = \vec{E}_{0t} e^{\pm \beta k_t z} e^{i(k_t x \frac{n_1}{n_2} \sin \theta_i - \omega t)}. \quad (4.11)$$

Eksponencijalni porast amplitude nije fizikalno prihvatljiv, što znači da amplituda transmitovanog vala mora eksponencijalno opadati sa okomitom udaljenošću od granice između dva dielektrika, to jest sa prodiranjem u optički rjeđu sredinu. Takav poremećaj koji se širi duž granice između dielektrika zove se isčezavajući val a veličina $\frac{1}{\beta}$ je dubina prodiranja.

Poglavlje 5

Goos - Hänchen pomak

Goos - Hänchen efekt je fenomen u klasičnoj optici prema kojem je odbijena svjetlost pri totalnoj unutrašnjoj refleksiji prostorno pomjerena, kao da je nakratko uronila u optički rjeđu sredinu prije nego što se odbila nazad u upadnu, optički gušću sredinu. Taj pomak su eksperimentalno prvi opazili Hermann Fritz Gustav Goos i Hilda Hänchen te je po njima dobio ime. Radi se o jakom malom pomaku koji se teško opaža te je potrebno da dielektrici između kojih se dešava efekat imaju male koeficijente apsorpcije ili transmisije. Sa prostornim pomakom povezano je vremensko kašnjenje odbijenog vala. Nakon eksperimentalnog opažanja, teorijsko objašnjenje efekta pokušali su dati brojni naučnici a u ovom radu razmatramo dva teorijska pristupa za objašnjenje Goos - Hänchen pomaka (u daljem tekstu GH pomak). Jedan metod je metod stacionarne faze koji se bazira na matematičkom aparatu za spektar frekvencije i valnog broja valnog paketa. Ovaj metod se još zove Artmannov model. Drugi metod bazira se na razmatranju energetskog fluksa odumirućeg vala, te ga možemo zvati metod energetskog fluksa. Ovaj metod, koji je dao Renard, pretpostavlja da dio energije upadnog svjetlosnog vala nosi isčezavajući val, tako putuje duž granice određenu udaljenost, a zatim se vraća nazad u odbijeni svjetlosni val. Iako fizikalno bolje objašnjava GH pomak, ovaj metod se ne slaže u potpunosti sa rezultatom koji daje metod stacionarne faze, te zbog toga zahtjeva određenu popravku. Popravku daje noviji metod energetskog fluksa, na koji ćemo se osvrnuti u ovom radu. Uz tu popravku Artmannov i Renardov model se u potpunosti slažu.

5.1 Metod stacionarne faze

Artmannov model se bazira na razmatranju faznog pomaka odbijenog vala u odnosu na upadni val. O kakvom faznom pomaku se radi? Prilikom razma-

tranja totalne unutrašnje refleksije pokazano je da je u tom slučaju transmivani val isčezavajućeg karaktera. Zbog $\sin \theta_t > 1$ i $\cos \theta_t = \pm i\beta$ Fresnelovi amplitudni koeficijenti (3.26) - (3.29) postaju kompleksni brojevi:

$$r_{\perp} = \frac{n_1 \cos \theta_i - i\sqrt{n_1^2 \sin^2 \theta_i - n_2^2}}{n_1 \cos \theta_i + i\sqrt{n_1^2 \sin^2 \theta_i - n_2^2}}, \quad (5.1)$$

$$t_{\perp} = \frac{2n_1 \cos \theta_i}{n_1 \cos \theta_i + i\sqrt{n_1^2 \sin^2 \theta_i - n_2^2}}, \quad (5.2)$$

$$r_{\parallel} = \frac{\frac{n_2^2}{n_1} \cos \theta_i - i\sqrt{n_1^2 \sin^2 \theta_i - n_2^2}}{\frac{n_2^2}{n_1} \cos \theta_i + i\sqrt{n_1^2 \sin^2 \theta_i - n_2^2}}, \quad (5.3)$$

$$t_{\parallel} = \frac{2n_1 \cos \theta_i}{\frac{n_2^2}{n_1} \cos \theta_i + i\sqrt{n_1^2 \sin^2 \theta_i - n_2^2}}. \quad (5.4)$$

Obzirom da je amplituda reflektovanog vala kompleksan broj, odbijeni val ima optički fazni pomak u odnosu na upadni val. Optički fazni pomak proizlazi iz:

$$r = \frac{\cos \alpha - i \sin \alpha}{\cos \alpha + i \sin \alpha} = \frac{a - ib}{a + ib} = \frac{e^{-i\alpha}}{e^{i\alpha}} = e^{-2i\alpha} = e^{i\phi}. \quad (5.5)$$

Na osnovu toga vrijedi:

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{b}{a}, \quad (5.6)$$

$$\phi = -2\alpha. \quad (5.7)$$

Vrijedi da je $|r| = 1$, a $|t| \neq 1$. Amplitudni koeficijent transmisije t možemo napisati kao:

$$t = |t|e^{-i\alpha}. \quad (5.8)$$

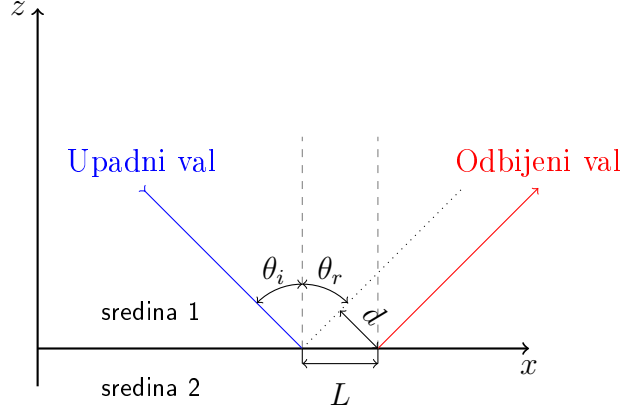
Obzirom da razlikujemo okomito i paralelno polarizovanu svjetlost, razlikovat će se i njihov fazni pomak. Za okomitu komponentu vrijedi:

$$\tan \frac{\phi_{\perp}}{2} = -\frac{\sqrt{n_1^2 \sin^2 \theta_i - n_2^2}}{n_1 \cos \theta_i}, \quad (5.9)$$

a za paralelnu komponentu:

$$\tan \frac{\phi_{\parallel} - \pi}{2} = -\frac{n_1^2 \sqrt{n_1^2 \sin^2 \theta_i - n_2^2}}{n_2^2 \cos \theta_i}, \quad (5.10)$$

gdje dodatni član π predstavlja faznu razliku između okomite i paralelne komponente svjetlosti.



Slika 5.1: Ilustracija Goos - Hänchen pomaka bazirana na metodu stacionarne faze.

Fazni pomak kojemu podliježe svjetlost pri totalnoj unutrašnjoj refleksiji ima za posljedicu longitudinalni pomak svjetlosnog vala, GH pomak:

$$d = L \cos \theta_i. \quad (5.11)$$

Do sad smo smatralni da je svjetlosni val ravni val. Problem s ravnim valom je taj što je on nelokalizovan u prostoru, to jest prečnik mu je beskonačan te se ne može uočiti nikakav efekat. Artmannov model razmatra upadni svjetlosni val kao valni paket. Valni paket je suma beskonačno mnogo valova koji imaju blago različite uglove prostiranja. Spektralna kompozicija upadnog vala po frekvencijama i valnim brojevima dobije se Fourierovom transformacijom:

$$\vec{E}_i(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{E}(k_x) e^{ik_x x} dk_x. \quad (5.12)$$

Pri totalnoj refleksiji svaki od beskonačno mnogo bliskih valova iskusi različit optički fazni pomak, koji možemo razviti u Taylorov red oko pravca ose upadnog ugla k_{x0} :

$$\delta(k_x) = \delta(k_{x0}) + \frac{d\delta(k_x)}{dk_x} (k_x - k_{x0}). \quad (5.13)$$

Fourierova transformacija reflektovanog vala je:

$$\begin{aligned} \vec{E}_r(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{E}(k_x) e^{i(k_x x + \delta(k_x))} dk_x \\ &= e^{i\delta(k_{x0})} \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{E}(k_x) e^{ik_x \left(x + \frac{d\delta(k_x)}{dk_x}\right)} dk_x \\ &= e^{i\delta(k_{x0})} \vec{E} \left(x + \frac{d\delta}{dk_x} \right). \end{aligned} \quad (5.14)$$

Dakle reflektovani val ima fazni pomak δk_{x0} i longitudinalni pomak $\frac{d\delta(k_x)}{dk_x}$ u odnosu na upadni val. Uz to i jednačinu (5.11), GH pomak je:

$$d = \frac{d\delta(k_x)}{dk_x} \cos \theta_i. \quad (5.15)$$

Razlikujemo GH pomak za okomitu i za paralelnu komponentu svjetlosti. Pogledajmo prvo okomitu komponentu svjetlosti.

$$\begin{aligned} d_{\perp} &= \frac{d\phi_{\perp}}{dk_x} \cos \theta_i \\ &= \frac{1}{k \cos \theta_i} \frac{d\phi_{\perp}}{d\theta_i} \cos \theta_i \\ &= \frac{1}{k} \frac{d\phi_{\perp}}{d\theta_i} \\ &= \frac{2}{k} \frac{d}{d\theta_i} \arctan \left(-\frac{\sqrt{n_1^2 \sin^2 \theta_i - n_2^2}}{n_1 \cos \theta_i} \right). \end{aligned} \quad (5.16)$$

Nalaženjem izvoda i sređivanjem izraza dobijamo GH pomak okomito polarizovane reflektovane svjetlosti:

$$d_{\perp} = \frac{\lambda}{\pi} \frac{\sin \theta_i}{\sqrt{\sin^2 \theta_i - \frac{n_2^2}{n_1^2}}}. \quad (5.17)$$

Analogno za paralelnu komponentu svjetlosti:

$$\begin{aligned} d_{\parallel} &= \frac{d\phi_{\parallel}}{dk_x} \cos \theta_i \\ &= \frac{1}{k \cos \theta_i} \frac{d\phi_{\parallel}}{d\theta_i} \cos \theta_i \\ &= \frac{1}{k} \frac{d\phi_{\parallel}}{d\theta_i} \\ &= \frac{2}{k} \frac{d}{d\theta_i} \arctan \left(-\frac{n_1^2 \sqrt{n_1^2 \sin^2 \theta_i - n_2^2}}{n_2^2 \cos \theta_i} \right) + \pi, \end{aligned} \quad (5.18)$$

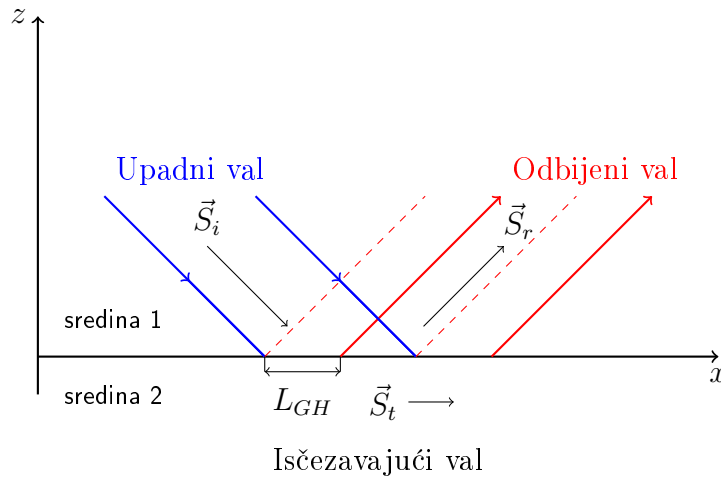
pa je GH pomak paralelno polarizovane reflektovane svjetlosti:

$$d_{\parallel} = \frac{n_2^2}{\sin^2 \theta_i (n_1^2 - n_2^2) - n_2^2} d_{\perp}. \quad (5.19)$$

Reprezentacija po spektru valnog broja i frekvencije predstavlja standardni metod obrade prostiranja valnog paketa. Procedura provedena kroz metod stacionarne faze, iako u potpunosti ispravna sa matematičke tačke gledišta, ne daje potrebni fizikalni uvid u fenomen.

5.2 Metod energetskega fluksa

U ovom pristupu upadni valni paket je predstavljen monohromatskim ravnim valom a GH pomak se računa iz zakona očuvanja energetskega fluksa uzimajući u obzir energetske fluks upadnog, totalno reflektovanog i isčezavajućeg vala. Radi lakše vizualizacije na slici 5.2 prikazujemo ravni val konačne širine. Razmotrimo situaciju u kojoj konačni ravni val pada iz prve sredine na ravnu površinu i biva totalno reflektovan nazad u prvu sredinu. Reflektovani val je pomaknut u smjeru x ose u odnosu na svoj očekivani položaj za iznos L_{GH} . Uočimo da ovdje postoji ukupni energetskega fluks (Poyntingov vektor) unutar druge sredine i to prenesen isčezavajućim valom u smjeru x ose.



Slika 5.2: Ilustracija Goos - Hänchen pomaka konačnog ravnog vala, bazirana na metodi energetskega fluksa.

Obzirom da energija mora biti očuvana, mora postojati jednak energetskega fluks lijevo od upadnog vala. Renard je pretpostavio da, obzirom da upadni i odbijeni val imaju jednaku gustoću energije, takav energetskega fluks mora biti jednak fluksu upadnog vala širine L_{GH} kao i fluksu odbijenog vala iste širine. Time se dobija izraz za GH pomak:

$$L_{GH} = \frac{1}{\langle S_{rx} \rangle} \int_{-\infty}^0 \langle S_{tx} \rangle dz, \quad (5.20)$$

gdje su veličine $\langle S_{rx} \rangle$ i $\langle S_{tx} \rangle$ x komponente srednje vrijednosti Poyntingovog vektora odbijenog (isčezavajućeg) vala respektivno. Dakle, potrebno je naći Poyntingov vektor odbijenog i isčezavajućeg vala i njihove srednje vrijednosti, a zatim iz izraza (5.20) jednostavno dobijamo GH pomak. Posebno

ćemo razmatrati dva slućaja, kao prilikom izvođenja Fresnelovih jednaćina. Uzimamo da je upadna ravan xz ravan a y -osa ulazi u ravan.

5.2.1 Vektor elektrićnog polja okomit na upadnu ravan

Razmatramo situaciju kao na slici 3.1. Pretpostavljamo da vektor elektrićnog polja ne mijenja smjer pri odbijanju i prelamanju. Da bi vektori \vec{k} , \vec{E} i \vec{B} i dalje ćinili desni triedar to znaći da vektor \vec{B} mijenja smjer. Razmotrimo prvo obijeni a zatim isćezavajući val. Reflektovani val se nalazi u prvoj sredini ćiji indeks prelamanja oznaćavamo sa n_1 a magnetnu permeabilnost sa μ_1 . Valna funkcija vektora elektrićnog polja je:

$$\vec{E}_r = E_r e^{i(\vec{k}_r \cdot \vec{r} - \omega t)} \vec{j}. \quad (5.21)$$

Skalarni proizvod u eksponentu je:

$$\vec{k}_r \cdot \vec{r} = k_{rx}x + k_{rz}z, \quad (5.22)$$

a komponentne valnog vektora su:

$$k_{rx} = k_r \sin \theta_i, \quad (5.23)$$

$$k_{rz} = k_r \cos \theta_i, \quad (5.24)$$

pa vektor elektrićnog polja (5.21) postaje:

$$\vec{E}_r = E_r e^{i(k_{rx}x \sin \theta_i + k_{rz}z \cos \theta_i - \omega t)} \vec{j}. \quad (5.25)$$

Vektor magnetne indukcije nalazimo pomoću Maxwellove jednaćine (2.2). Komponente x i z vektora magnetne indukcije bit će razlićite od nula:

$$B_{rx} = -\frac{k_r \cos \theta_i}{\omega} E_r e^{i(k_{rx}x \sin \theta_i + k_{rz}z \cos \theta_i - \omega t)}, \quad (5.26)$$

$$B_{rz} = \frac{k_r \sin \theta_i}{\omega} E_r e^{i(k_{rx}x \sin \theta_i + k_{rz}z \cos \theta_i - \omega t)}. \quad (5.27)$$

Traćeni vektor magnetne indukcije odbijenog vala svjetlosti sa okomito polarizovanim elektrićnim vektorom je:

$$\vec{B}_r = -\frac{k_r \cos \theta_i}{\omega} E_r e^{i(k_{rx}x \sin \theta_i + k_{rz}z \cos \theta_i - \omega t)} \vec{i} + \frac{k_r \sin \theta_i}{\omega} E_r e^{i(k_{rx}x \sin \theta_i + k_{rz}z \cos \theta_i - \omega t)} \vec{k}. \quad (5.28)$$

$$\text{Re}(\vec{E}_r) = |E_r| \cos(k_{rx}x \sin \theta_i + k_{rz}z \cos \theta_i - \omega t) \vec{j}, \quad (5.29)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(\vec{B}_r) = & -\frac{k_r \cos \theta_i}{\omega} |E_r| \cos(k_r x \sin \theta_i + k_r z \cos \theta_i - \omega t) \vec{i} \\ & + \frac{k_r \sin \theta_i}{\omega} |E_r| \cos(k_r x \sin \theta_i + k_r z \cos \theta_i - \omega t) \vec{k}. \end{aligned} \quad (5.30)$$

Pomoću jednačine (2.42) i relacije $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$ dobijamo Poyntingov vektor odbijenog vala:

$$\begin{aligned} \vec{S}_r = & \frac{k_r \sin \theta_i}{\mu_1 \omega} |E_r|^2 \cos^2(k_r x \sin \theta_i + k_r z \cos \theta_i - \omega t) \vec{i} \\ & + \frac{k_r \cos \theta_i}{\mu_1 \omega} |E_r|^2 \cos^2(k_r x \sin \theta_i + k_r z \cos \theta_i - \omega t) \vec{k}. \end{aligned} \quad (5.31)$$

Treba imati u vidu da je $|E_r| = |E_i|$ u slučaju $\theta_i > \theta_c$ za obje polarizacije. Vremenski usrednjen Poyntingov vektor je:

$$\langle \vec{S}_r \rangle = \langle \vec{S}_{rx} \rangle + \langle \vec{S}_{tx} \rangle. \quad (5.32)$$

Korištenjem činjenica:

$$\langle \cos^2(k_t x \sin \theta_t - \omega t) \rangle = \frac{1}{2}, \quad (5.33)$$

$$\langle \cos(k_t x \sin \theta_t - \omega t) \sin(k_t x \sin \theta_t - \omega t) \rangle = 0, \quad (5.34)$$

vremenski usrednjen Poyntingov vektor reflektovanog vala je:

$$\langle \vec{S}_r \rangle = \frac{k_r \sin \theta_i}{2\mu_1 \omega} |E_r|^2 \vec{i} + \frac{k_r \cos \theta_i}{2\mu_1 \omega} |E_r|^2 \vec{k}. \quad (5.35)$$

Isčezavajući val se nalazi u drugoj sredini sa indeksom prelamanja n_2 i magnetnom permeabilnošću μ_2 . Vektor električnog polja isčezavajućeg vala je:

$$\vec{E}_t = E_t e^{i(\vec{k}_t \cdot \vec{r} - \omega t)} \vec{j}, \quad (5.36)$$

gdje je

$$\vec{k}_t \cdot \vec{r} = k_{tx} x + k_{tz} z. \quad (5.37)$$

Korištenjem:

$$k_{tx} = k_t \sin \theta_t, \quad (5.38)$$

$$k_{tz} = -k_t \cos \theta_t, \quad (5.39)$$

uz (4.9) i (4.10), izraz (5.37) pišemo kao:

$$\vec{k}_t \cdot \vec{r} = k_{tx} x + k_{tz} z (\pm i\beta). \quad (5.40)$$

Kako je u drugoj sredini $z < 0$ uzimamo $\cos \theta_t = +i\beta$, te vektor električnog polja iščezavajućeg vala u skladu sa (4.11) postaje:

$$\vec{E}_t = E_t e^{\beta k_t z} e^{i(k_t x \sin \theta_t - \omega t)} \vec{j}. \quad (5.41)$$

Vektor magnetne indukcije, koji ponovo nalazimo prema relaciji (2.2), je:

$$\begin{aligned} \vec{B}_t &= \frac{i\beta k_t}{\omega} E_t e^{\beta k_t z} e^{i(k_t x \sin \theta_t - \omega t)} \vec{i} \\ &+ \frac{k_t \sin \theta_t}{\omega} E_t e^{\beta k_t z} e^{i(k_t x \sin \theta_t - \omega t)} \vec{k}. \end{aligned} \quad (5.42)$$

Za nalaženje Poyntingovog vektora trebaju nam realni dijelovi vektora \vec{E}_t i \vec{B}_t . Kako je $E_t = tE_i$ gdje se t može napisati kao u relaciji (5.8), realni dijelovi vektora električnog polja i vektora magnetne indukcije su:

$$Re(\vec{E}_t) = |E_t| e^{\beta k_t z} \cos(k_t x \sin \theta_t - \omega t - \alpha) \vec{j}, \quad (5.43)$$

$$\begin{aligned} Re(\vec{B}_t) &= \frac{\beta k_t}{\omega} |E_t| e^{\beta k_t z} \sin(k_t x \sin \theta_t - \omega t - \alpha) \vec{i} \\ &+ \frac{k_t \sin \theta_t}{\omega} |E_t| e^{\beta k_t z} \cos(k_t x \sin \theta_t - \omega t - \alpha) \vec{k}. \end{aligned} \quad (5.44)$$

Poyntingov vektor nalazimo na isti način kao za odbijeni val, te dobijamo:

$$\begin{aligned} \vec{S}_t &= \frac{k_t \sin \theta_t}{\mu_2 \omega} |E_t|^2 e^{2\beta k_t z} \cos^2(k_t x \sin \theta_t - \omega t - \alpha) \vec{i} \\ &- \frac{\beta k_t}{\mu_2 \omega} |E_t|^2 e^{2\beta k_t z} \cos(k_t x \sin \theta_t - \omega t - \alpha) \sin(k_t x \sin \theta_t - \omega t - \alpha) \vec{k}. \end{aligned} \quad (5.45)$$

U izrazu za GH pomak traži se Poyntingov vektor usrednjen po vremenu:

$$\begin{aligned} \langle \vec{S}_t \rangle &= \frac{k_t \sin \theta_t}{\mu_2 \omega} |E_t|^2 e^{2\beta k_t z} \langle \cos^2(k_t x \sin \theta_t - \omega t - \alpha) \rangle \vec{i} \\ &- \frac{\beta k_t}{\mu_2 \omega} |E_t|^2 e^{2\beta k_t z} \langle \cos(k_t x \sin \theta_t - \omega t - \alpha) \sin(k_t x \sin \theta_t - \omega t - \alpha) \rangle \vec{k}. \end{aligned} \quad (5.46)$$

Uvažavanjem relacija (5.33) i (5.34) srednja vrijednost Poyntingovog vektora u toku vremena je:

$$\langle \vec{S}_t \rangle = \langle S_{tx} \rangle \vec{i} = \frac{k_t \sin \theta_t}{2\mu_2 \omega} |E_t|^2 e^{2\beta k_t z} \vec{i}. \quad (5.47)$$

Sama komponenta z Poyntingovog vektora iščezavajućeg vala nije jednaka nuli, ali njena srednja vrijednost jeste. Iz toga vidimo da iako energija teče

duž z -ose u drugu sredinu, sva ta energija se ipak vrati u prvu sredinu. Na taj način iščezavajući val ne nosi sa sobom energiju kako se udaljava do sredine. Iz činjenice da x komponenta nije nula vidimo da prenese dio energije duž dodirne ravni. Ostalo je još da izraze za srednju vrijednost Poyntingovog vektora odbijenog i iščezavajućeg vala uvrstimo u relaciju (5.20), te tako dobijemo izraz za GH pomak:

$$L_{GH} = \frac{k_t \sin \theta_t}{k_r \sin \theta_i} |t_\perp|^2 \int_{-\infty}^0 e^{2\beta k_t z} dz = \frac{1}{2\beta k_t} |t_\perp|^2, \quad (5.48)$$

gdje smo uvažili $k = \frac{\omega}{v} = \frac{n\omega}{c}$, $\frac{k_t}{k_r} = \frac{n_2}{n_1}$ a zatim $\sin \theta_t = \frac{n_1}{n_2} \sin \theta_i$. t_\perp i r_\perp su Fresnelovi amplitudni koeficijenti dati izrazima (5.1) i (5.2).

$$|t_\perp|^2 = \frac{4n_1^2 \cos^2 \theta_i}{n_1^2 - n_2^2}. \quad (5.49)$$

Izraz za GH pomak je:

$$L_{GH\perp} = \frac{\lambda}{\pi \sqrt{\frac{n_1^2 \sin^2 \theta_i}{n_2^2} - 1}} \frac{n_1^2 \cos^2 \theta_i}{n_1^2 - n_2^2}. \quad (5.50)$$

5.2.2 Vektor električnog polja paralelan upadnoj ravni

Situacija je kao na slici 3.2. Odbijeni val se nalazi u prvoj sredini u kojoj je indeks prelamanja n_1 a magnetna permeabilnost μ_1 . Vektor električnog polja reflektovanog vala je:

$$\vec{E}_r = E_{rx} e^{i(\vec{k}_r \cdot \vec{r} - \omega t)} \vec{i} + E_{rz} e^{i(\vec{k}_r \cdot \vec{r} - \omega t)} \vec{k}. \quad (5.51)$$

$$\vec{k}_r \cdot \vec{r} = k_{rx} x + k_{rz} z = k_{rx} \sin \theta_i + k_{rz} \cos \theta_i. \quad (5.52)$$

Komponente vektora (5.51) su:

$$E_{rx} = E_r \cos \theta_i, \quad (5.53)$$

$$E_{rz} = -E_r \sin \theta_i. \quad (5.54)$$

pa možemo pisati:

$$\begin{aligned} \vec{E}_r &= E_r \cos \theta_i e^{i(k_{rx} \sin \theta_i + k_{rz} \cos \theta_i - \omega t)} \vec{i} \\ &\quad - E_r \sin \theta_i e^{i(k_{rx} \sin \theta_i + k_{rz} \cos \theta_i - \omega t)} \vec{k}. \end{aligned} \quad (5.55)$$

Vektor magnetne indukcije je:

$$\vec{B}_r = \frac{k_r}{\omega} E_r e^{i(k_{rx} \sin \theta_i + k_{rz} \cos \theta_i - \omega t)} \vec{j}. \quad (5.56)$$

Realni dijelovi vektora električnog polja i magnetne indukcije su:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(\vec{E}_r) &= |E_r| \cos \theta_i \cos(k_r x \sin \theta_i + k_r z \cos \theta_i - \omega t) \vec{i} \\ &\quad - |E_r| \sin \theta_i \cos(k_r x \sin \theta_i + k_r z \cos \theta_i - \omega t) \vec{k}, \end{aligned} \quad (5.57)$$

$$\operatorname{Re}(\vec{B}_r) = \frac{k_r}{\omega} |E_r| \cos(k_r x \sin \theta_i + k_r z \cos \theta_i - \omega t) \vec{j}. \quad (5.58)$$

Poyntingov vektor odbijenog vala je:

$$\begin{aligned} \vec{S}_r &= \frac{k_r \sin \theta_i}{\mu_1 \omega} |E_r|^2 \cos^2(k_r x \sin \theta_i + k_r z \cos \theta_i - \omega t) \vec{i} \\ &\quad + \frac{k_r \cos \theta_i}{\mu_1 \omega} |E_r|^2 \cos^2(k_r x \sin \theta_i + k_r z \cos \theta_i - \omega t) \vec{k}. \end{aligned} \quad (5.59)$$

Vremenski usrednjen Poyntingov vektor odbijenog vala:

$$\langle \vec{S}_r \rangle = \frac{k_r \sin \theta_i}{2\mu_1 \omega} |E_r|^2 \vec{i} + \frac{k_r \cos \theta_i}{2\mu_1 \omega} |E_r|^2 \vec{k}. \quad (5.60)$$

Isčezavajući val se nalazi u drugoj sredini u kojoj je indkes prelamanja n_2 a magnetna permeabilnost μ_2 . Vektor električnog polja isčezavajućeg vala:

$$\vec{E}_t = E_{tx} e^{i(\vec{k}_t \cdot \vec{r} - \omega t)} \vec{i} + E_{tz} e^{i(\vec{k}_t \cdot \vec{r} - \omega t)} \vec{k}. \quad (5.61)$$

Analogno razmatranju situacije kada je vektor električnog polja okomit na upadnu ravan, dobijamo da je vektor električnog polja isčezavajućeg vala:

$$\vec{E}_t = -E_t \cos \theta_t e^{\beta k_t z} e^{i(k_t x \sin \theta_t - \omega t)} \vec{i} - E_t \sin \theta_t e^{\beta k_t z} e^{i(k_t x \sin \theta_t - \omega t)} \vec{k}. \quad (5.62)$$

Vektor magnetnog polja isčezavajućeg vala je:

$$\vec{B}_t = \frac{k_t}{\omega} E_t e^{\beta k_t z} e^{i(k_t x \sin \theta_t - \omega t)} \vec{j}. \quad (5.63)$$

Realni dijelovi vektora električnog polja i magnetne indukcije:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(E_t) &= -|E_t| \cos \theta_t e^{\beta k_t z} \sin(k_t x \sin \theta_t - \omega t - \alpha) \vec{i} \\ &\quad - |E_t| \sin \theta_t e^{\beta k_t z} \cos(k_t x \sin \theta_t - \omega t - \alpha) \vec{k}. \end{aligned} \quad (5.64)$$

Poyntingov vektor:

$$\begin{aligned} \vec{S}_t &= \frac{k_t \sin \theta_t}{\mu_2 \omega} |E_t|^2 e^{2\beta k_t z} \cos^2(k_t x \sin \theta_t - \omega t - \alpha) \vec{i} \\ &\quad - \frac{k_t \cos \theta_t}{\mu_2 \omega} |E_t|^2 e^{2\beta k_t z} \sin(k_t x \sin \theta_t - \omega t - \alpha) \cos(k_t x \sin \theta_t - \omega t - \alpha) \vec{k}. \end{aligned} \quad (5.65)$$

Analogno relaciji (5.47) i razmatranju za iščezavajući val okomito polarizovane svjetlosti, vremenski usrednjen Poyntingov vektor je:

$$\langle \vec{S}_t \rangle = \langle S_{tx} \rangle \vec{i} = \frac{k_t \sin \theta_t}{2\mu_2 \omega} |E_t|^2 e^{2\beta k_t z} \vec{i}. \quad (5.66)$$

Po istoj analogiji, izraz za GH pomak paralelno polarizovane svjetlosti je:

$$L_{GH\parallel} = \frac{1}{2\beta k_t} |t_{\parallel}|^2, \quad (5.67)$$

gdje je t_{\parallel} dat sa izrazom (5.4), pa je GH pomak :

$$L_{GH\parallel} = \frac{\lambda}{\pi \sqrt{\frac{n_1^2 \sin^2 \theta_i}{n_2^2} - 1}} \frac{n_1^4 \cos^2 \theta_i}{n_2^4 \cos^2 \theta_i + n_1^4 \sin^2 \theta_i - n_1^2 n_2^2}. \quad (5.68)$$

U poređenju sa metodom stacionarne faze, konvencionalni metod energetskega fluksa daje bolje intuitivno objašnjenje fizikalnog mehanizma ovog fenomena, ali se ne dobiju identični rezultati.

5.3 Novi metod energetskega fluksa

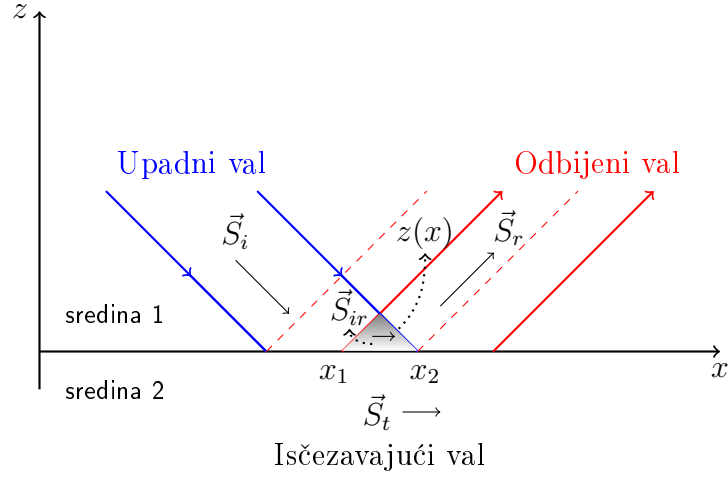
Rezultati dobijeni Artmannovim i Renardovim modelom se ne slažu u potpunosti. Razlika je najizraženija za skoro paralelni upad (grazing incidence). Obzirom da Renardov model razmatra energetskega fluksa paralelan sa dodirnom površinom dielektrika nije korektno razmatrati takav fluks u samo jednoj sredini (koji potiče samo od iščezavajućeg vala). Takav fluks postoji i u prvoj sredini, u oblasti gdje se preklapaju upadni i odbijeni val.

Neka konačan ravni val pada na ravnu površinu i neka je uslijed GH pomaka totalno reflektovani ravni val pomaknut u smjeru x ose. Tada se upadni i odbijeni val preklapaju u regionu osjenčenom na slici 5.3. Poyntingov vektor unutar te oblasti ćemo dobiti pomoću formule:

$$\begin{aligned} \vec{S} &= \frac{1}{\mu_1} \left[(\vec{E}_i + \vec{E}_r) \times (\vec{B}_i + \vec{B}_r) \right] \\ &= \frac{1}{\mu_1} \left[\vec{E}_i \times \vec{B}_i + \vec{E}_i \times \vec{B}_r + \vec{E}_r \times \vec{B}_i + \vec{E}_r \times \vec{B}_r \right]. \end{aligned} \quad (5.69)$$

Prvi i četvrti član u zagradi su Poyntingov vektor upadnog i reflektovanog vala respektivno, a Poyntingov vektor interakcije čine drugi i treći član:

$$\vec{S}_{ir} = \frac{1}{\mu_1} \left[\vec{E}_i \times \vec{B}_r + \vec{E}_r \times \vec{B}_i \right]. \quad (5.70)$$



Slika 5.3: Ilustracija Goos - Hänchen pomaka konačnog ravnog vala bazirana na novom metodu energetskega fluksa; osjenčeni region predstavlja područje interakcije upadnog i reflektovanog vala.

Komponenta Poyntingovog vektora paralelna sa granicom sredina jeste x komponenta. Kasnije ćemo pokazati da je z komponenta Poyntingovog vektora interakcije jednaka nuli, formule (5.86) i (5.94), dok ćemo x komponentu, koja može biti različita od nule, označavati sa S_{irx} . Ukoliko je ta komponenta različita od nule, ona doprinosi GH pomaku te je odgovorna za popravku Renardovog modela. Ukupan energetskega fluks u oblasti interakcije zavisi od same oblasti interakcije koja je pojednostavljeno prikazana na slici 5.3. Energetskega fluks interakcije kroz ravan okomitu na granicu sredina usrednjen po x koordinati računamo po formuli:

$$\langle P_{irx} \rangle_x = \frac{1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} dx \int_0^{z(x)} S_{irx} dz, \quad (5.71)$$

gdje smo sa $\langle \rangle_x$ označili usrednjavanje po x . U originalnom Renardovom modelu [6, 7] se koristi (beskonačan) ravni val, što za oblast interakcije postizemo uzimanjem limesa kada granice oblasti interakcije teže u beskonačnost $x_2 - x_1 \rightarrow \infty$:

$$\langle P_{irx} \rangle_x = \lim_{x_2 - x_1 \rightarrow \infty} \frac{1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} dx \int_0^{z(x)} S_{irx} dz. \quad (5.72)$$

Izraz za GH pomak postaje:

$$L_{GH} = \frac{1}{\langle S_{rx} \rangle} \left[\int_{-\infty}^0 \langle S_{tx} \rangle dz + \langle P_{irx} \rangle_x \right]. \quad (5.73)$$

Ponovo možemo posebno razmotriti slučajeve vektora električnog polja okomitog i paralelnog upadnoj ravni.

5.3.1 Vektor električnog polja okomit na upadnu ravan

Ranije smo razmotrili odbijeni val, tako da preostaje naći vektore električnog polja i magnetne indukcije upadnog vala. Vektor električnog polja upadnog vala:

$$\vec{E}_i = E_i e^{i(\vec{k}_i \cdot \vec{r} - \omega t)} \vec{j}. \quad (5.74)$$

Komponentne valnog vektora su

$$k_{ix} = k_i \sin \theta_i, \quad (5.75)$$

$$k_{iz} = k_i \cos \theta_i, \quad (5.76)$$

a

$$\vec{k}_i \cdot \vec{r} = k_{ix}x + k_{iz}z. \quad (5.77)$$

Vektor električnog polja se može zapisati kao:

$$\vec{E}_i = E_i e^{i(k_{ix}x \sin \theta_i - k_{iz}z \cos \theta_i - \omega t)} \vec{j}. \quad (5.78)$$

Vektor magnetnog indukcije upadnog vala prema (2.2) je:

$$\vec{B}_i = \frac{k_i \cos \theta_i}{\omega} E_i e^{i(k_{ix}x \sin \theta_i - k_{iz}z \cos \theta_i - \omega t)} \vec{i} + \frac{k_i \sin \theta_i}{\omega} E_i e^{i(k_{ix}x \sin \theta_i - k_{iz}z \cos \theta_i - \omega t)} \vec{k}. \quad (5.79)$$

Realni dijelovi ovih vektora su:

$$Re(\vec{E}_i) = E_i \cos(k_{ix}x \sin \theta_i - k_{iz}z \cos \theta_i - \omega t) \vec{j}, \quad (5.80)$$

$$Re(\vec{B}_i) = \frac{k_i \cos \theta_i}{\omega} E_i \cos(k_{ix}x \sin \theta_i - k_{iz}z \cos \theta_i - \omega t) \vec{i} + \frac{k_i \sin \theta_i}{\omega} E_i \sin(k_{ix}x \sin \theta_i - k_{iz}z \cos \theta_i - \omega t) \vec{k}. \quad (5.81)$$

Vektori električnog polja i magnetne indukcije reflektovanog vala dati su relacijama (5.25) i (5.28) respektivno. Veza između amplituda upadnog i reflektovanog vala je: $E_r = E_i e^{i\Phi}$, a $k_i = k_r = k$, pa relacije (5.25) i (5.28) možemo pisati kao:

$$\vec{E}_r = E_i e^{i(kx \sin \theta_i + kz \cos \theta_i - \omega t + \Phi)} \vec{j}, \quad (5.82)$$

$$\begin{aligned}\vec{B}_r &= -\frac{k \cos \theta_i}{\omega} E_i e^{i(kx \sin \theta_i + kz \cos \theta_i - \omega t + \Phi)} \vec{i} \\ &+ \frac{k \sin \theta_i}{\omega} E_i e^{i(kx \sin \theta_i + kz \cos \theta_i - \omega t + \Phi)} \vec{k}.\end{aligned}\quad (5.83)$$

Realni dijelovi ovih vektora su:

$$\text{Re}(\vec{E}_r) = E_i \cos(kx \sin \theta_i + kz \cos \theta_i - \omega t + \Phi) \vec{j}, \quad (5.84)$$

$$\begin{aligned}\text{Re}(\vec{B}_r) &= \frac{k \cos \theta_i}{\omega} E_i \cos(kx \sin \theta_i + kz \cos \theta_i - \omega t + \Phi) \vec{i} \\ &+ \frac{k \sin \theta_i}{\omega} E_i \cos(kx \sin \theta_i + kz \cos \theta_i - \omega t + \Phi) \vec{k}.\end{aligned}\quad (5.85)$$

Poyntingov vektor u području interakcije je:

$$\begin{aligned}\vec{S}_{ir} &= \frac{k \sin \theta_i}{\mu_1 \omega} E_i^2 \cos(kx \sin \theta_i - kz \cos \theta_i - \omega t) \cos(kx \sin \theta_i + kz \cos \theta_i - \omega t + \Phi) \vec{i} \\ &+ \frac{k \cos \theta_i}{\mu_1 \omega} E_i^2 \cos(kx \sin \theta_i - kz \cos \theta_i - \omega t) \cos(kx \sin \theta_i + kz \cos \theta_i - \omega t + \Phi) \vec{k} \\ &+ \frac{k \sin \theta_i}{\mu_1 \omega} E_i^2 \cos(kx \sin \theta_i - kz \cos \theta_i - \omega t) \cos(kx \sin \theta_i + kz \cos \theta_i - \omega t + \Phi) \vec{i} \\ &- \frac{k \cos \theta_i}{\mu_1 \omega} E_i^2 \cos(kx \sin \theta_i - kz \cos \theta_i - \omega t) \cos(kx \sin \theta_i + kz \cos \theta_i - \omega t + \Phi) \vec{k}.\end{aligned}$$

Nakon skraćivanja prethodne relacije, preostaje samo x komponenta Poyntingovog vektora:

$$S_{irx} = \frac{2k \sin \theta_i}{\mu_1 \omega} E_i^2 \cos(kx \sin \theta_i - kz \cos \theta_i - \omega t) \cos(kx \sin \theta_i + kz \cos \theta_i - \omega t + \Phi). \quad (5.86)$$

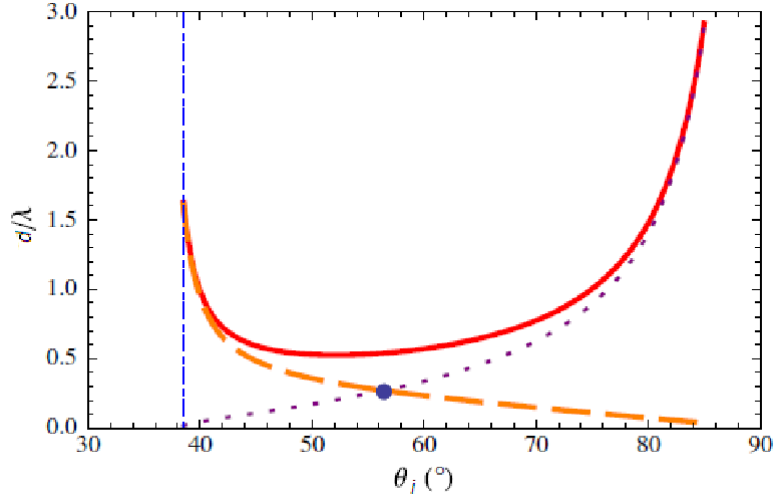
Korištenjem smjena navedenih u dodatku A i formule (5.72), usrednjeni energetske fluks u oblasti interakcije kroz ravan okomitu na graničnu površinu postaje:

$$\langle P_{irx} \rangle_x = \frac{-\sin \theta_i E_i^2}{2 \cos \theta_i \mu_1 \omega} \sin \Phi_{\perp}. \quad (5.87)$$

5.3.2 Vektor električnog polja paralelan upadnoj ravni

Vektor električnog polja upadnog vala:

$$\begin{aligned}\vec{E}_i &= -E_i \cos \theta_i e^{i(kx \sin \theta_i - kz \cos \theta_i - \omega t)} \vec{i} \\ &- E_i \sin \theta_i e^{i(kx \sin \theta_i - kz \cos \theta_i - \omega t)} \vec{k}.\end{aligned}\quad (5.88)$$



Slika 5.4: Poređenje GH pomaka TE moda u zavisnosti od upadnog ugla; isprekidana linija je Renardov model, tačkasta linija je novi metod energetskog fluksa a puna linija je Artmannov metod. Parametri: $\lambda = 32,8\text{mm}$, $n_1 = 1,606$, $\theta_c = 38,5^\circ$. [8]

Vektor magnetne indukcije:

$$\vec{B}_i = \frac{k}{\omega} E_i e^{i(kx \sin \theta_i - kz \cos \theta_i - \omega t)} \vec{j}. \quad (5.89)$$

Njihovi realni dijelovi su:

$$\begin{aligned} \text{Re}(\vec{E}_i) &= -E_i \cos \theta_i \cos(kx \sin \theta_i - kz \cos \theta_i - \omega t) \vec{i} \\ &\quad - E_i \sin \theta_i \cos(kx \sin \theta_i - kz \cos \theta_i - \omega t) \vec{k}, \end{aligned} \quad (5.90)$$

$$\text{Re}(\vec{B}_i) = \frac{k}{\omega} E_i \cos(kx \sin \theta_i - kz \cos \theta_i - \omega t) \vec{j}. \quad (5.91)$$

Realni dijelovi vektora električnog polja i magnetne indukcije reflektovanog vala dati su izrazima (5.57) i (5.58), te ih analogno razmatranju okomite polarizacije pišemo kao:

$$\begin{aligned} \text{Re}(\vec{E}_r) &= E_i^2 \cos \theta_i \cos(kx \sin \theta_i + kz \cos \theta_i - \omega t + \Phi) \times \\ &\quad \cos(kx \sin \theta_i - kz \cos \theta_i - \omega t) \vec{i} \\ &\quad - E_i^2 \sin \theta_i \cos(kx \sin \theta_i + kz \cos \theta_i - \omega t + \Phi) \times \\ &\quad \cos(kx \sin \theta_i - kz \cos \theta_i - \omega t) \vec{k}, \end{aligned} \quad (5.92)$$

$$\text{Re}(\vec{B}_r) = \frac{k}{\omega} E_i^2 \cos(kx \sin \theta_i + kz \cos \theta_i - \omega t + \Phi) \cos(kx \sin \theta_i - kz \cos \theta_i - \omega t) \vec{j}. \quad (5.93)$$

Poyntingov vektor, kod kojeg je nakon usrednjavanja samo x komponenta različita od nule, dobijamo na isti način kao u slučaju okomite polarizacije:

$$S_{irx} = \frac{2k \sin \theta_i}{\mu_1 \omega} E_i^2 \cos(kx \sin \theta_i + kz \cos \theta_i - \omega t + \Phi) \times \cos(kx \sin \theta_i - kz \cos \theta_i - \omega t). \quad (5.94)$$

Provođenjem postupka iz dodatka A dobijamo:

$$\langle P_{irx} \rangle_x = \frac{-\sin \theta_i E_i^2}{2 \cos \theta_i \mu_1 \omega} \sin \Phi_{\parallel}. \quad (5.95)$$

Na kraju, dobro je naglasiti da isčezavajući val daje najveći doprinos pri upadnom uglu jednakom ili malo većem od kritičnog. Pri takvim upadnim uglovima doprinos korekcije na oblast interakcije je mali. To se vidi i na slici 5.4. Za upadne uglove manje od kritičnog ne formira se isčezavajući val, a energetska fluks interakcije je jednak nuli nakon usrednjavanja, što se vidi iz formula (5.95, 5.87). Naime, tada je fazni pomak takav da je $\sin \Phi = 0$. Pri skoro paralelnom upadu doprinos isčezavajućeg vala je zanemariv, dok dominantan doprinos GH pomaku dolazi od energetske fluksa interakcije.

Poglavlje 6

Primjene

Goos - Hänchen pomak u dielektricima ima primjene u optičkim valovodima koji su bitni za prenos informacija, u mikroskopiji bioloških pojava, u frustriranoj totalnoj refleksiji koja se koristi za uzimanje otiska prsta itd. Brojne su njegove primjene u drugim sredinama kao što su optički temperaturni senzori za granicu između metala i dielektrika. Primjenjuje se u fenomenu uhvaćene duge (trapped rainbow) u metamaterijalima¹ što je bitno u informacijskim tehnologijama. GH pomak se također pojavljuje u neutronske optici. Obzirom da smo u ovom radu razmotrili GH pomak pri prelasku svjetlosti između dielektrika, ukratko ćemo opisati neke primjene u dielektricima.

6.1 Dielektrični valovodi

Optički valovodi su strukture koje se koriste za ograničavanje i vođenje svjetlosti u uređajima za vođenje valova i u integrisanoj optici. Dobro poznati valovod je optičko vlakno, koje ima kružni poprečni presjek. U integrisanoj optici se više koristi ravni valovod. U razmatranju valovoda pretpostavimo da je vođena svjetlost monohromatska i koherentna te da su valovodi napravljeni od homogenog i izotropnog dielektrika. Dakle ovdje vrijedi razmatranje koje je provedeno u ovom radu, od Maxwellovih jednačina za dielektrik do totalne unutrašnje refleksije.

Simetrični optički valovod se sastoji od jezgra sa većim indeksom prelamanja n_1 i od omotača koji ima indeks prelamanja $n_2 < n_1$, a asimetrični optički valovod ima omotač sa dva različita indeksa prelamanja n_2 i n'_2 . Moguća su tri ishoda za svjetlosni zrak u valovodu. Moguće je da svjetlost nakon prelamanja na vanjskoj a zatim i na unutrašnjoj površini valovoda napusti valovod. Povećanjem upadnog ugla, moguće je da se svjetlost, nakon prela-

¹Metamaterijali su materijali sa negativnim indeksom prelamanja.

manja na granici između sredine sa manjim i sredine sa većim indeksom prelamanja i ulaska u jezgro, totalno reflektuje na granici između jezgra i omotača a zatim da se ponovo prelomi i izađe izvan valovoda. Treća opcija je da se svjetlost nakon ulaska pod dovoljno velikim uglom totalno reflektuje na obje strane. Kada uđe unutar valovoda, svjetlost biva uhvaćena i ograničena u filmu te se nastavlja prostirati u obliku cik-cak putanje. Svjetlost u valovodu se opisuje ravnim elektromagnetnim valom.

Sada ćemo razmotriti svjetlosnu energiju unutar valovoda. Definišimo svjetlosni zrak kao smjer Poyntingovog vektora. U skladu s tim je i definicija zraka kao ose uskog snopa svjetlosti ili valnog paketa. Za slučaj izotropne, homogene sredine, osa vala i zraka svjetlosti se poklapaju ali u anizotropnoj sredini one mogu imati različit smjer. GH pomak je drugi slučaj u kojem se vidi različito ponašanje zrake svjetlosti i ose svjetlosnog vala. GH pomak je jako bitan u razumijevanju energetskega toka u dielektričnom valovodu. Za dobijanje modela svjetlosne cik-cak zrake koja je u skladu sa energetskim tokom, moramo uvažiti GH pomak na granicama između jezgra i omotača optičkog vlakna. Posljedica prodiranja svjetlosnog zraka unutar omotača je što izgleda kao da valovod posjeduje efektivnu debljinu koja je veća od debljine samog valovoda:

$$h_{eff} = h + 2x. \quad (6.1)$$

Svjetlost se donekle proširi na omotač i biva ograničena do efektivne debljine h_{eff} . Efektivna debljina ne može biti jednaka nuli, čak ni u simetričnom valovodu. Za asimetrični valovod uvodi se normirana efektivna debljina:

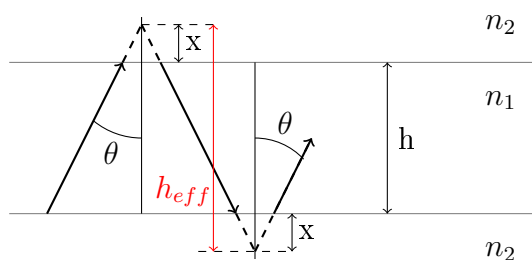
$$h_{eff}^{norm} = kh_{eff} \sqrt{n_2^2 - n_1'^2}, \quad (6.2)$$

gdje je k valni vektor. Ona se može optimizirati za dobijanje maksimalnog intenziteta svjetlosti i gradijenta intenziteta svjetlosti u omotaču valovoda. Optimizacija ima za cilj da osigura dominaciju optičkih sila² u odnosu na nepotrebne uticaje kao što je Brownovo kretanje.

6.2 Fluorescencija totalnom unutrašnjom refleksijom

TIRF (Total internal reflection fluorescence) je specijalna tehnika u fluorescentnoj mikroskopiji. TIRF je razvio Daniel Axelrod na Univerzitetu u

²Optička sila je fenomen prema kojem se svjetlosni zraci mogu međusobno odbijati i privlačiti. Sila djeluje duž ose koja je okomita na svjetlosni zrak. Zbog toga paralelni zraci mogu biti konvergentni ili divergentni. Optička sila djeluje na mikroskopskoj skali te se zbog toga ne detektuje na većim skalama.



Slika 6.1: Goos - Hänchen pomak u simetričnom optičkom vlaknu. Dubina prodiranja je označena sa x . Efektivna debljina vlakna je h_{eff} .

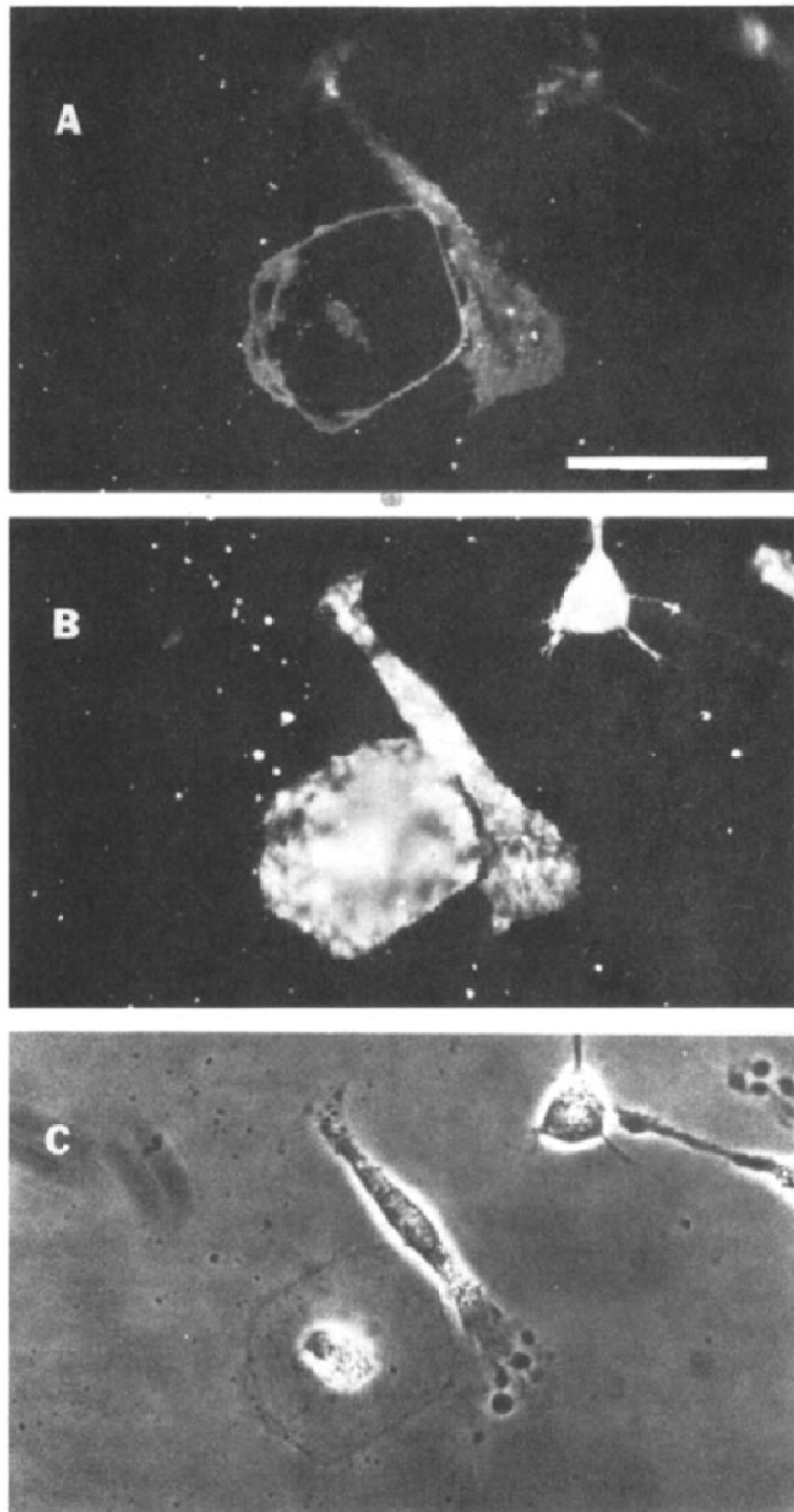
Michiganu 1980-ih. TIRF je optički efekt koji omogućava slikanje fluorescentnih molekula blizu granice između tečnosti i čvrstog tijela. Zbog toga TIRF ima primjenu u širokom dijapazonu biofizičkih i biokemijskih procesa (grušanje krvi na stranoj površini, transport elektrona kroz mitohondrijsku membranu, pokretljivost bakterija, algi itd.). TIRF se često koristi u kombinaciji sa drugim metodama fluorescentne mikroskopije.

Opisali smo fenomen totalne unutrašnje refleksije. Neka se radi o totalnoj unutrašnjoj refleksiji na granici između staklene prizme i vodenog rastvora. Poznato nam je dan pri tom fenomenu jedan dio elektromagnetnog polja, nazvan isčezavajući val, prodire u drugu (tečnu) sredinu, putuje duž granice, te se vraća u upadnu sredinu. Isčezavajući val može pobuditi fluorescentne molekule, koje se mogu nalaziti blizu površine. Ovaj efekt predstavlja i eksperimentalni dokaz postojanja isčezavajućeg vala. Intenzitet isčezavajućeg vala eksponencijalno opada sa okomitom udaljenošću od površine:

$$I(z) = I_0 e^{-\frac{z}{d}}, \quad (6.3)$$

gdje je d dubina prodiranja, koja zavisi od valne dužine, a nezavisna je od polarizacije upadne svjetlosti. Dubina prodiranja opada sa porastom upadnog ugla. Na samoj granici $z = 0$, I_0 zavisi od upadnog ugla ali i od polarizacije upadne svjetlosti. Intenzitet isčezavajućeg vala dat je kvadratom Fresnelovih amplitudnih koeficijenata. Prilikom razmatranja totalne unutrašnje refleksije, vidjeli smo da reflektovani val ima fazni pomak u odnosu na upadni val. Taj fazni pomak povezan je sa GH pomakom. U bilo kojem metodu fluorescentne mikroskopije cilj je da minimalan broj fluorofora³ emituje svjetlost u trenutku slikanja. To je teško postići u ostalim metodama zato što veliki broj čestica sjaji iz pozadine, stvarajući šum te zatamnjujući sliku, ali u TIRF mikroskopiji taj problem je riješen. Kako energija isčezava-

³Fluorofora je fluorescentni hemijski spoj koji može re-emitovati svjetlost pri pobuđenju.



Slika 6.2: Pобољшanje slike ćelije pomoću TIRF. Mijenjanjem upadnog ugla totalno reflektovanog laserskog snopa, samim tim i dubine prodiranja, moguća je bolja vidljivost detalja topografije ćelijske strukture.[9]

jućeg polja opada eksponencijalno sa udaljenošću od površine, pobuđuju se samo fluorofore u blizini zaštitnog stakla mikroskopa. Ovo omogućava dobitanje slika sa izvanrednim odnosom signala i šuma, obzirom da su fluorofore u ostatku ćelije slabo pobuđene. Osim toga, TIRF mikroskopija daje slike sa izrazito velikom aksijalnom rezolucijom (ispod 100 nm). Ovo omogućava posmatranje membranskih procesa kao što je ćelijska adhezija, vezivanje hormona, transport molekula te egzotički i endotički procesi.

Poglavlje 7

Zaključak

U ovom radu dali smo kratko objašnjenje elektromagnetne teorije svjetlosti i naveli Maxwellove jednačine. Pomoću Maxwellovih jednačina i graničnih uslova izveli smo Fresnelove jednačine, koje daju informaciju o ponašanju svjetlostnog vala na granici između dvije sredine, u ovom slučaju dva dielektrika i to za obje polarizacije svjetlosti. Ukratko smo objasnili i fenomen totalne unutrašnje refleksije. Razmatrali smo metode za objašnjenje Goos - Hänchen pomaka koji se dešava pri totalnoj refleksiji na granici između dva dielektrika.

U metodu stacionarne faze ili Artmannovom modelu, uveli sam Fourierovu transformaciju kao matematički aparat za raspodjelu valnog paketa po frekvencijama i valnim brojevima. Zatim smo izveli pomak za obje polarizacije. Artmannov model kaže da fazni pomak između upadnog i reflektovanog vala daje i pomak koji su prvi eksperimentalno opazili Gustav Goos i Hilda Hänchen.

U metodu energetskega fluksa ili Renardovom modelu, izveli sam Poyntingov vektor za obje polarizacije. Renardov model kaže da se pri totalnoj refleksiji dešava jedna pojava da nešto energije iz upadnog vala procuri u drugu sredinu te se ponovo vrati u upadnu sredinu kao dodatak reflektovanom valu. Dakle, objašnjenje GH pomaka ovaj metod daje u vidu zakona očuvanja energije.

Razmotrili smo i noviji metod energetskega fluksa. Ovaj novi metod smatra da stari metod energetskega fluksa u sebi sadrži neprilično pojednostavljenje, to jest ne uzima u obzir samu interakciju između upadnog i reflektovanog vala. Novi izrazi za GH pomak izvedeni su za obje polarizacije. Ovi novi izrazi svode se na izraze koje je izveo Artmann, ali je fizikalni uvid u porijeklo GH pomaka daleko jasniji.

Dodatak A

Matematički dodatak

Član u zagradi izraza (5.86) transformišemo pomoću smjena:

$$\alpha = kz \cos \theta_i + \Phi, \quad (\text{A.1})$$

$$\beta = kx \sin \theta_i - \omega t, \quad (\text{A.2})$$

$$\gamma = -kz \cos \theta_i, \quad (\text{A.3})$$

pa postaje jednak:

$$\cos(\beta + \alpha) \cos(\beta + \gamma) = \frac{1}{2} \cos(\alpha - \gamma). \quad (\text{A.4})$$

U prethodnom izrazu izvršili smo vremensko usrednjavanje pa su nestali članovi koji sadrže β . Vraćanjem smjena u izraz (A.4), izraz (5.86) postaje:

$$S_{irx} = \frac{k \sin \theta_i}{\mu_1 \omega} E_i^2 \cos(2kz \cos \theta_i + \Phi). \quad (\text{A.5})$$

Tako dobijeni izraz integriramo prema relaciji (5.72). Prvo integriramo po z u granicama od 0 do $z(x)$:

$$\int_0^{z(x)} S_{irx} dz = \frac{k \sin \theta_i}{2k \cos \theta_i \mu_1 \omega} E_i^2 [\sin(2kz(x) \cos \theta_i + \Phi) - \sin \Phi]. \quad (\text{A.6})$$

U oblasti interakcije $z(x)$ je linearna funkcija od x , što se vidi na slici 5.3. Zatim vršimo integraciju po x i uzimamo limes kada $x_2 - x_1 \rightarrow \infty$. Integral od funkcije \sin će isčeznuti kao integral brzooscilirajuće funkcije, pa izraz (5.72) postaje:

$$\begin{aligned} \langle P_{irx} \rangle_x &= \frac{\sin \theta_i E_i^2}{2 \cos \theta_i \mu_1 \omega} \lim_{x_2 - x_1 \rightarrow \infty} \frac{1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} [\sin(2kz(x) \cos \theta_i + \Phi) - \sin \Phi] dx \\ &= \frac{-\sin \theta_i E_i^2}{2 \cos \theta_i \mu_1 \omega} \sin \Phi. \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

Bibliografija

- [1] F. Goos, H. Hänchen, *Ein neuer und fundamentaler Versuch zur Totalreflexion*, Annalen der Physik **6**, 333 - 346, (1947).
- [2] K. Yasumoto, Y. Ōishi, *A new evaluation of the Goos - Hänchen shift and associated time delay*, Journal of applied physics **54**, 2170, (1983).
- [3] H. K. V. Lotsch, *Reflection and refraction of a beam of light at plane interface*, Journal of the optical society of America **58**, 4, (1968).
- [4] F. W. Sears, *Optika*, Naučna knjiga, (1963).
- [5] A. N. Matveev, *Optics*, (1988).
- [6] R. H. Renard, *Total internal reflection: a new evaluation of the Goos - Hänchen shift*, Journal of the optical society of America **54**, 10, (1964).
- [7] F. Pillon, H. Gilles, S. Girard, M. Laroche, R. Kaiser, A. Gazibegovic, *Goos - Hänchen and Imbert - Fedorov shifts for leaky guided modes*, Journal of the optical society of America **22**, 6, (2005).
- [8] X. Chen, X.-J. Lu, P.-L. Zhao, Q.-B. Zhu, *Energy flux and Goos - Hänchen shift*, Optics letters **37**, 9, (2012).
- [9] D. Axelrod, T. P. Burghardt, N. L. Thompson, *Total internal reflection fluorescence*, Annual review of biophysics and bioengineering **13**, 214-268, (1984).