

Univerzitet u Sarajevu
Prirodno-matematički fakultet
Odsjek za fiziku
I ciklus studija - Opći smjer/Teorijska fizika

PRIMJENA NEPERTURBATIVNIH
METODA U ATOMSKIM PROCESIMA U
LASERSKOM POLJU

ZAVRŠNI RAD

Mentor:
doc. dr. Aner Čerkić

Kandidatkinja:
Jelena Dakić

Sarajevo, juli 2015.

Zahvaljujem svom mentoru doc. dr. Aneru Čerkiću na
pomoći pruženoj prilikom izrade ovog završnog rada

Sadržaj

Uvod	iv
1 Teorijski tretman procesa u laserskom polju	1
1.1 Interakcija atoma sa laserskim poljem	1
1.2 Sistem centra masa i dipolna aproksimacija	5
1.3 Kalibracione transformacije	7
1.4 Greenov operator i formalizam S-matrice	8
1.5 Volkovljev vektor stanja	13
1.6 Atomske jedinice	14
2 Elektron-atomsko rasijanje	17
2.1 Eksperimenti elektron-atomskog rasijanja	17
2.2 Teorija i numerički rezultati	19
3 Jonizacija iznad praga	30
3.1 Eksperimenti jonizacije iznad praga	30
3.2 Teorija	33
3.3 Numerički rezultati	36
4 Odvajanje iznad praga	38
4.1 Teorija	38
4.2 Numerički rezultati	42
5 Elektron-jonska rekombinacija	44
5.1 Teorija	45
5.2 Numerički rezultati	49
6 Generacija viših harmonika	52
6.1 Osobine viših harmonika	53
6.2 Teorija i numerički rezultati	55
Zaključak	59

Uvod

Pojava lasera imala je ogroman značaj za razvoj atomske fizike. Izlaganje atoma i jona uticaju jakog laserskog polja dovelo je do otkrića novih, do tada nepoznatih procesa. Takođe, pod djelovanjem laserskog polja, kod procesa koji su bili poznati i prije otkrića lasera pojavili su se neki novi efekti i strukture u energetskom spektru. Atomske procese u laserskom polju možemo podijeliti u dvije osnovne grupe. Prvu grupu predstavljaju laserom asistirani (laser-assisted) procesi, koji se mogu odvijati i bez prisustva laserskog polja. Primjeri ovakvih procesa su elektron-atomsko rasijanje ili FFT (free-free transitions), elektron-jonska rekombinacija ili LAR (laser-assisted recombination), rasijanje x-zraka na atomima i jonizacija atoma x-zracima. Drugu grupu čine laserom indukovani (laser-induced) procesi, koji nisu mogući bez djelovanja jakog laserskog polja. U ove procese spadaju jonizacija iznad praga ili ATI (above-threshold ionization), odvajanje elektrona od negativnih jona iznad praga ili ATD (above-threshold detachment), nesekvencijalna dvostruka jonizacija ili NSDI (non-sequential double ionization) i generacija viših harmonika ili HHG (high-order harmonic generation).

U ovom radu ćemo predstaviti neke od ovih atomskih procesa. Bavit ćemo se elektron-atomskim rasijanjem, jonizacijom iznad praga, odvajanjem elektrona od negativnih jona iznad praga, elektron-jonskom rekombinacijom, kao i generacijom viših harmonika. Zgodno je napomenuti da ovi procesi nisu mogli biti objašnjeni teorijom perturbacije, odnosno razvojem u red po veličini I_L/I_A , količniku intenziteta laserskog polja i polja unutar atoma.

U prvom poglavlju uvodimo vremenski zavisni Greenov operator i teoriju S -matričnog formalizma koju ćemo koristiti prilikom razmatranja raznih atomskih procesa u laserskom polju. Takođe su navedene i objašnjene neke aproksimacije i metode koje primjenjujemo u našim teorijskim proračunima. U drugom poglavlju je opisan proces elektron-atomskog rasijanja primjenom S -matričnog formalizma. Korištena je druga Bornova aproksimacija, odnosno u obzir su uzeta prva dva člana u Bornovom razvoju S -matričnog elementa. Prvi član odgovara direktnom rasijanju koje predstavlja glavni doprinos procesu, dok drugi član opisuje ponovno rasijanje (rescattering),

koje se javlja zbog djelovanja laserskog polja. Dakle, elektron koji se rasijao na atomu može se pod uticajem laserskog polja vratiti do tog istog atoma i ponovo se na njemu rasijati. Element S -matrice (odnosno, T -matrice) je izračunat primjenom metode stacionarne faze. Razmatrano je rasijanje elektrona na atomima helijuma, neona, argona, ksenona i kriptona a kao model potencijala rasijanja uzeli smo sumu statičkog i polarizacionog potencijala. Takođe smo vidjeli da se proces elektron-atomskog rasijanja uspješno može tretirati pomoću metode stacionarne faze (sedlaste tačke) i da se dobijeni rezultati prilično dobro slažu sa ranijim rezultatima, koji su dobijeni primjenom aproksimacije jakog polja u S -matričnom formalizmu. U trećem poglavlju smo se bavili procesom jonizacije iznad praga (ATI). Slično kao i u prethodnom poglavlju, za teorijske proračune smo koristili tzv. KFR model (Keldysh-Faisal-Reiss) koji je određen prvim članom u Bornovom razvoju S -matrice po atomskom potencijalu V , pri čemu je interakcija jonizovanog elektrona sa laserskim poljem uzeta u obzir implicitno pomoću Volkovljevog vektora stanja. Naime, KFR model je ustvari aproksimacija jakog polja. Međutim, za dobivanje drugog platoa unutar teorijskih proračuna, neophodno je u obzir uzeti i članove višeg reda koji uključuju rescattering. Dakle, koristimo aproksimaciju jakog polja i uzimamo u obzir prva dva člana u Bornovom razvoju S -matričnog elementa po potencijalu V , pri čemu je za potencijal uzet potencijal kratkog dometa. U četvrtom poglavlju je opisan proces odvajanja elektrona od negativnih jona iznad praga (ATD). To je proces analogan ATI procesu, s tim da su u ATD procesu mete negativni joni, a ne atomi kao što je slučaj u ATI procesu. Dakle, ovdje se posmatra odvajanje slabo vezanog elektrona od negativnog jona unutar laserskog polja. Naši teorijski proračuni su i dalje razmatrani primjenom aproksimacije jakog polja (SFA). Peto poglavlje se bavi razmatranjima elektron-jonske rekombinacije (LAR). U direktnom LAR procesu, slobodni elektron dolazi iz asimptotskog područja i rekombinuje se sa pozitivnim jonom u laserskom polju, pri čemu nastaje vezano atomsko stanje. Prije same rekombinacije, elektron razmijenjen n fotona sa laserskim poljem koje ima nisku frekvenciju i visok intenzitet. Konačni rezultat procesa je emisija visokoenergetskog fotona. Međutim, može se desiti da se dolazeći elektron prvo rasije na jonskom potencijalu, nakon čega se kreće u laserskom polju koje ga vraća nazad do jona sa kojim se konačno rekombinuje. I ovdje, kao i u prethodnim razmatranjima, za teorijske proračune koristimo aproksimaciju jakog polja i S -matrični formalizam. U šestom poglavlju opisan je proces generacije viših harmonika (HHG). Suština ovog procesa je u tome da nakon jonizacije atoma u laserskom polju, to polje vraća oslobođeni elektron nazad do matičnog jona, prilikom čega dolazi do njihove rekombinacije. Atom se vraća u osnovno stanje, emitujući harmonički foton čija frekvencija predstavlja cjelobrojni umnožak frekvencija

laserskih fotona. Efikasnost generacije harmonika je okarakterisana naglim padom za niže redove harmonika, nakon čega slijedi široki plato približno iste visine koji završava naglim padom, tj. odsjecanjem (eng. cutoff). Za naše teorijske proračune, kao i do sada, koristili smo S -matrični formalizam i aproksimaciju jakog polja.

Poglavlje 1

Teorijski tretman procesa u laserskom polju

Predstavit ćemo sada osnove teorije koju koristimo pri kasnijim razmatranjima atomskih procesa u laserskom polju. Primijenit ćemo lasersku aproksimaciju i objasniti postupak prelaska sa kvantnog na klasično elektromagnetsko polje. Prelaskom na sistem centra masa i korištenjem dipolne aproksimacije pojednostavit ćemo hamiltonijan sistema atom+polje. Zatim ćemo navesti neke od transformacija hamiltonijana, koje mogu biti korisne pri konkretnim teorijskim proračunima. Takođe, uvest ćemo vremenski-zavisne Greenove operatore i objasniti formalizam S -matrice. Na kraju ovog poglavlja definisat ćemo atomske jedinice, s obzirom da su naši teorijski proračuni provedeni u atomskom sistemu jedinica.

1.1 Interakcija atoma sa laserskim poljem

Pošto u proračunima koji slijede nećemo uzimati u obzir relativističke efekte, polazna osnova za razmatranje procesa u laserskom polju je Schrödingerova jednačina. Kada imamo atom u laserskom polju, odgovarajuća Schrödingerova jednačina glasi

$$\left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - H \right) \Psi = 0, \quad (1.1)$$

gdje je hamiltonijan sistema atom+polje dat sa [1]

$$H = H_R + \frac{1}{2m} \sum_{i=1}^Z [\mathbf{p}_{ei} + e\mathbf{A}(\mathbf{r}_{ei})]^2 + \frac{1}{2M} [\mathbf{p}_N - Ze\mathbf{A}(\mathbf{r}_N)]^2 + V(\mathbf{r}_{e1}, \dots, \mathbf{r}_{eZ}, \mathbf{r}_N). \quad (1.2)$$

U gornjoj jednačini je e elementarni naboj, M masa atomskog jezgra, m masa elektrona, \mathbf{p}_N operator impulsa atomskog jezgra, \mathbf{p}_{ei} operator impulsa elektrona, Z broj elektrona u atomu, \mathbf{r}_N radijus-vektor položaja jezgra, \mathbf{r}_{ei} radijus-vektor položaja elektrona, dok je H_R hamiltonijan slobodnog elektromagnetskog polja, definisan sa

$$H_R = \sum_k \hbar \omega_k \tilde{n}_k, \quad (1.3)$$

gdje se sumiranje vrši po kompletnom skupu modova k elektromagnetskog polja, određenih vrijednostima talasnog vektora \mathbf{k} i polarizacije λ , tj. pojednostavili smo indeksnu notaciju pišući $k \equiv (\mathbf{k}, \lambda)$. Za svaki talasni vektor \mathbf{k} postoje dva nezavisna pravca, odnosno dvije polarizacije λ vektorskog potencijala $\mathbf{A}(\mathbf{r})$. U gornjoj jednačini, $\omega_k = c|\mathbf{k}|$ je ugaona frekvencija moda k , a \tilde{n}_k je operator čije su vlastite vrijednosti brojevi zaposjednuća (ili brojevi fotona) pojedinih modova. Ovaj operator je definisan izrazom

$$\tilde{n}_k = a_k^\dagger a_k, \quad (1.4)$$

gdje a_k^\dagger (a_k) predstavlja operator stvaranja (uništavanja) fotona u modu k . Operatori stvaranja i uništavanja fotona zadovoljavaju komutacione relacije

$$[a_k, a_{k'}^\dagger] = \delta_{kk'}, \quad (1.5)$$

a svi ostali komutatori su jednaki nuli.

Vektorski potencijal $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ se može razviti po bilo kom kompletnom skupu $\mathbf{u}_k(\mathbf{r})$ koji zadovoljava talasnu jednačinu

$$\left(\nabla^2 - \frac{\omega_k^2}{c^2} \right) \mathbf{u}_k(\mathbf{r}) = 0. \quad (1.6)$$

Najjednostavniji od njih je skup ravnih talasa

$$\mathbf{u}_k(\mathbf{r}) = \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_k \frac{\exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}{\sqrt{\mathcal{V}}}, \quad (1.7)$$

gdje je \mathcal{V} volumen kvantizacije elektromagnetskog polja, a $\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_k$ vektor polarizacije moda k , pri čemu mora vrijediti

$$\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_k \cdot \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_k^* = 1, \quad \mathbf{k} \cdot \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_k = 0. \quad (1.8)$$

Vektor polarizacije u eksplicitnom obliku glasi

$$\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_k = \hat{\mathbf{e}}_x \cos \eta_k + i \hat{\mathbf{e}}_y \sin \eta_k. \quad (1.9)$$

Ovdje je η_k ugao polarizacije moda k , a $\hat{\mathbf{e}}_x$ i $\hat{\mathbf{e}}_y$ su jedinični vektori u smjeru x - i y -ose, respektivno. Kada razvijemo vektorski potencijal $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ po skupu ravnih talasa (1.7), imamo

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \sum_k \left(\frac{2\pi\hbar}{\omega_k} \right)^{1/2} [a_k \mathbf{u}_k(\mathbf{r}) + a_k^\dagger \mathbf{u}_k^*(\mathbf{r})]. \quad (1.10)$$

Drugi i treći član u izrazu (1.2) predstavljaju interakciju elektromagnetskog polja sa elektronima i atomskim jezgrom, respektivno, dok posljednji član opisuje preostalu interakciju između čestica, koja nije uzrokovana elektromagnetskim poljem (to je suma po dvočestičnim Coulombovim interakcijama između nabijenih čestica).

S obzirom na veliki broj fotona u modovima laserskog polja, ono se može dobro opisati klasičnim elektromagnetskim poljem. Da bi to pokazali, prvo ćemo preći na interakcionu reprezentaciju. Primijenit ćemo transformaciju

$$\Psi = \exp(-iH_R t/\hbar) \Psi_I, \quad (1.11)$$

gdje je Ψ_I talasna funkcija u interakcionoj reprezentaciji. Schrödingerova jednačina je u tom slučaju oblika

$$\left[i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - H_I(t) \right] \Psi_I = 0, \quad (1.12)$$

gdje je hamiltonijan sistema atom+polje u interakcionoj reprezentaciji dat izrazom

$$H_I(t) = \frac{1}{2m} \sum_{i=1}^Z [\mathbf{p}_{ei} + e\mathbf{A}(\mathbf{r}_{ei}, t)]^2 + \frac{1}{2M} [\mathbf{p}_N - Ze\mathbf{A}(\mathbf{r}_N, t)]^2 + V(\mathbf{r}_{e1}, \dots, \mathbf{r}_{eZ}, \mathbf{r}_N). \quad (1.13)$$

Vektorski potencijal u interakcionoj reprezentaciji je eksplicitno zavisano od vremena i dat je sa

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \exp(iH_R t/\hbar) \mathbf{A}(\mathbf{r}) \exp(-iH_R t/\hbar). \quad (1.14)$$

Kada u gornju jednačinu uvrstimo izraz (1.10) za vektorski potencijal $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ i iskoristimo komutacione relacije za operatore stvaranja i uništavanja, dobit ćemo

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \sum_k \left(\frac{2\pi\hbar}{\omega_k} \right)^{1/2} [a_k \mathbf{u}_k(\mathbf{r}) \exp(-i\omega_k t) + a_k^\dagger \mathbf{u}_k^*(\mathbf{r}) \exp(i\omega_k t)]. \quad (1.15)$$

Primijenimo sada faznu reprezentaciju polja [2]. Za svaki mod polja, uvodimo nezavisne koordinate ϕ_k , čije su vrijednosti u intervalu $[0, 2\pi]$. Ove nezavisne koordinate nazivamo faznim pomacima. Stanje sa n fotona u modu k je u ovoj reprezentaciji opisano vlastitom talasnom funkcijom

$$\langle \phi_k | n_k \rangle = (2\pi)^{-1/2} \exp(in_k \phi_k) . \quad (1.16)$$

Operator broja zaposjednuća je tada

$$\tilde{n}_k = -i \frac{\partial}{\partial \phi_k} , \quad (1.17)$$

a operatori uništavanja i stvaranja su, respektivno, dati relacijama

$$a_k = e^{-i\phi_k} \left(-i \frac{\partial}{\partial \phi_k} \right)^{1/2} , \quad a_k^\dagger = \left(-i \frac{\partial}{\partial \phi_k} \right)^{1/2} e^{i\phi_k} . \quad (1.18)$$

S obzirom na veliki broj fotona u modovima laserskog polja, trenutni broj fotona u modu k se može predstaviti kao

$$n_k = N_k + \nu_k , \quad (1.19)$$

gdje je N_k srednja vrijednost broja fotona u tom modu u toku datog procesa, a ν_k je varijacija oko tog broja, pri čemu je $N_k \gg \nu_k$. Uvažavajući relaciju (1.19), vršimo unitarnu transformaciju

$$|n_k\rangle = e^{iN_k \phi_k} |\nu_k\rangle . \quad (1.20)$$

Operator broja zaposjednuća je u ovoj reprezentaciji dat sa

$$\tilde{n}_k = N_k - i \frac{\partial}{\partial \phi_k} , \quad (1.21)$$

a operatori uništavanja i stvaranja su, respektivno, definisani izrazima

$$a_k = e^{-i\phi_k} \left(N_k - i \frac{\partial}{\partial \phi_k} \right)^{1/2} , \quad a_k^\dagger = \left(N_k - i \frac{\partial}{\partial \phi_k} \right)^{1/2} e^{i\phi_k} . \quad (1.22)$$

Pošto je u ovoj reprezentaciji $i\partial/\partial\phi_k$ reda veličine ν_k , a znamo da je $N_k \gg \nu_k$, može se izvršiti razvoj u red u relacijama (1.22). Tada je

$$a_k = e^{-i\phi_k} \sqrt{N_k} \left(1 - \frac{i}{2N_k} \frac{\partial}{\partial \phi_k} \dots \right) . \quad (1.23)$$

Ako se u gornjem izrazu za a_k i analognom izrazu za a_k^\dagger u obzir uzmu samo prva dva člana u razvoju, njihovim uvrštavanjem u (1.15) se dobije

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \sum_k \left(\frac{2\pi\hbar N_k}{\mathcal{V}\omega_k} \right)^{1/2} \left\{ \hat{\mathbf{e}}_k \exp [i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega_k t - \phi_k)] \right. \\ \left. + \hat{\mathbf{e}}_k^* \exp [-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega_k t - \phi_k)] \right\} + \delta\mathbf{A}, \end{aligned} \quad (1.24)$$

gdje smo iskoristili definiciju ravnih talasa (1.7). Član $\delta\mathbf{A}$ predstavlja prvu kvantnu korekciju i dat je izrazom

$$\begin{aligned} \delta\mathbf{A} = \frac{1}{2} \sum_k \left(\frac{2\pi\hbar}{\mathcal{V}\omega_k N_k} \right)^{1/2} \left\{ \hat{\mathbf{e}}_k \exp [i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega_k t - \phi_k)] \left(-i \frac{i\partial}{\partial\phi_k} \right) \right. \\ \left. + \hat{\mathbf{e}}_k^* \left(-i \frac{i\partial}{\partial\phi_k} \right) \exp [-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega_k t - \phi_k)] \right\}. \end{aligned} \quad (1.25)$$

Član $\delta\mathbf{A}$ potiče od drugih članova u razvoju a_k i a_k^\dagger . Iz relacije (1.23) vidimo da je drugi član u razvoju a_k srazmjeran sa ν_k/N_k . Pošto je $\nu_k/N_k \ll 1$, drugi član je mnogo manji od prvog i može se zanemariti. Odatle slijedi da je i $\delta\mathbf{A}$ zanemarljivo malo, pa u relaciji (1.24) ostaje samo prvi član koji ima oblik klasičnog vektorskog potencijala sa amplitudom moda

$$A_{0k} = \frac{E_{0k}}{\omega_k} = \left(\frac{8\pi\hbar N_k}{\mathcal{V}\omega_k} \right)^{1/2}. \quad (1.26)$$

Polja proizvoljne polarizacije su opisana eksplicitnim oblikom (1.9) vektora polarizacije, pa je u tom slučaju vektorski potencijal moda k dat sa

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_k(\mathbf{r}, t) = A_{0k} \left[\hat{\mathbf{e}}_x \cos(\omega_k t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \phi_k) \cos \eta_k \right. \\ \left. + \hat{\mathbf{e}}_y \sin(\omega_k t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \phi_k) \sin \eta_k \right]. \end{aligned} \quad (1.27)$$

Za $\eta_k = 0$ imamo linearnu polarizaciju u smjeru x -ose, a za $\eta_k = \pi/2$ linearnu polarizaciju u smjeru y -ose. Ako je $\eta_k = \pi/4$, polarizacija je kružna, a ostale vrijednosti ugla η_k daju eliptičku polarizaciju.

1.2 Sistem centra masa i dipolna aproksimacija

Pređimo na sistem centra masa. Uvodimo koordinatu centra masa $\boldsymbol{\rho}$ i relativne koordinate \mathbf{r}_i , pomoću sljedećih izraza:

$$\boldsymbol{\rho} = M_A^{-1} \left(M\mathbf{r}_N + \sum_{i=1}^Z m\mathbf{r}_{ei} \right), \quad \mathbf{r}_i = \mathbf{r}_{ei} - \mathbf{r}_N, \quad M_A = M + Zm. \quad (1.28)$$

U gornjim izrazima, M_A je masa atoma. Sa tačnošću do $\mathcal{O}(m/M)$, imamo

$$\mathbf{r}_{ei} = \boldsymbol{\rho} + \mathbf{r}_i. \quad (1.29)$$

Dakle, vektorski potencijal $\mathbf{A}(\mathbf{r}_{ei}, t)$ je funkcija novih koordinata $\boldsymbol{\rho}$ i \mathbf{r}_i , tj. $\mathbf{A}(\mathbf{r}_{ei}, t) \sim \exp[\pm i\mathbf{k} \cdot (\boldsymbol{\rho} + \mathbf{r}_i)]$. Relativne koordinate su najčešće ograničene veličinom atoma, tako da je (u području optičkih frekvencija)

$$\langle \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_i \rangle \ll 1. \quad (1.30)$$

Oдавde slijedi da je

$$\exp(\pm i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_i) = 1 \pm i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_i + \dots \approx 1. \quad (1.31)$$

Posljednja relacija poznata je kao dipolna aproksimacija. Ako se zanemare članovi koji su m/M puta manji od vodećih i koristi dipolna aproksimacija, tada se iz jednačina (1.13) i (1.28) dobija

$$H_I(t) = \frac{\mathbf{p}_\rho^2}{2M} + \frac{1}{2m} \sum_{i=1}^Z [\mathbf{p}_i + e\mathbf{A}(\boldsymbol{\rho}, t)]^2 + V(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_Z; \boldsymbol{\rho}). \quad (1.32)$$

Doprinos koordinate centra masa vektorskom potencijalu elektromagnetskog polja je sadržan u faktoru $\exp(\pm i\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\rho})$, pa elektromagnetsko polje, uopšte uzevši, može uticati na kretanje atoma kao cjeline. Međutim, taj uticaj je obično mali, jer je masa atoma velika. Ako ga zanemarimo, onda je $\boldsymbol{\rho}$ konstantno ili je sporo promjenljiva funkcija vremena. Tada se u hamiltonijanu (1.32) može ispustiti prvi član, koji predstavlja kinetičku energiju centra masa. Takođe se može staviti $\boldsymbol{\rho} = \mathbf{0}$, pa možemo pisati $\mathbf{A}(\boldsymbol{\rho}, t) = \mathbf{A}(t)$. Hamiltonijan sistema je tada oblika

$$H_I(t) = \frac{1}{2m} \sum_{i=1}^Z [\mathbf{p}_i + e\mathbf{A}(t)]^2 + V(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_Z), \quad (1.33)$$

a vektorski potencijal $\mathbf{A}(t)$ laserskog polja je dat izrazom

$$\mathbf{A}(t) = \sum_k \left(\frac{2\pi\hbar N_k}{\mathcal{V}\omega_k} \right)^{1/2} \left\{ \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_k \exp[-i(\omega_k t + \phi_k)] + \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_k^* \exp[i(\omega_k t + \phi_k)] \right\}, \quad (1.34)$$

pri čemu smo zanemarili prvu kvantnu korekciju $\delta\mathbf{A}$. Ako odaberemo vektor polarizacije (1.9), vektorski potencijal moda k je

$$\mathbf{A}_k(t) = A_{0k} [\hat{\mathbf{e}}_x \cos(\omega_k t + \phi_k) \cos \eta_k + \hat{\mathbf{e}}_y \sin(\omega_k t + \phi_k) \sin \eta_k]. \quad (1.35)$$

1.3 Kalibracione transformacije

Hamiltonijan (1.33) može biti nepraktičan pri konkretnim proračunima fizikalnih veličina. Zato se često koriste kalibracione ili geidž-transformacije (eng. gauge), pomoću kojih se prelazi na drugačije oblike hamiltonijana koji su ekvivalentni polaznom. Unatoč nazivu, ove transformacije ne treba dovoditi u vezu sa istoimenim lokalnim faznim transformacijama koje se u kvantnoj teoriji polja koriste za dobijanje članova u hamiltonijanu koji opisuju fundamentalne interakcije. Fazne transformacije koje se ovdje koriste su obične globalne transformacije. Te transformacije su unitarne, tj. to su transformacije simetrije. Prema tome, fizikalne veličine ostaju nepromijenjene pri tim transformacijama. Označimo hamiltonijan (1.33) sa H_1 , a talasnu funkciju u jednačini (1.12) sa Ψ_1 . Nazovimo to prvim geidžom. Uopšte uzevši, j -ti geidž se iz prvog dobija unitarnom transformacijom [1, 2]

$$\Psi_j = \exp(i\Phi_j) \Psi_1, \quad (1.36)$$

pri čemu je funkcija Φ_j proizvoljna. Nova talasna funkcija zadovoljava transformisanu Schrödingerovu jednačinu

$$\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - H_j\right) \Psi_j = 0, \quad (1.37)$$

gdje je novi hamiltonijan H_j određen relacijom

$$H_j = \exp(i\Phi_j) H_1 \exp(-i\Phi_j) - \hbar\frac{\partial\Phi_j}{\partial t}. \quad (1.38)$$

Pogledajmo sada tri izbora geidža koji se najčešće koriste pri teorijskim razmatranjima procesa u laserskom polju. Drugi geidž, koga zovemo $\mathbf{p} \cdot \mathbf{A}$ geidž, je takav da u hamiltonijanu H_1 nestaju članovi koji sadrže \mathbf{A}^2 . U ovom geidžu imamo

$$\Phi_2 = \frac{Ze^2}{2m\hbar} \int_{-\infty}^t \mathbf{A}^2(t') dt', \quad (1.39)$$

što vodi na hamiltonijan

$$H_2 = \frac{1}{2m} \sum_{i=1}^Z p_i^2 + \frac{e}{m} \sum_{i=1}^Z \mathbf{A}(t) \cdot \mathbf{p}_i + V. \quad (1.40)$$

Treći ili $\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}$ geidž se dobija izborom

$$\Phi_3 = \frac{e}{\hbar} \sum_{i=1}^Z \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{A}(t). \quad (1.41)$$

Koristeći relacije

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \exp(i\Phi_3) \mathbf{p}_j \exp(-i\Phi_3) = \mathbf{p}_j - e\mathbf{A}(t), \quad (1.42)$$

dobija se hamiltonijan oblika

$$H_3 = \frac{1}{2m} \sum_{i=1}^Z p_i^2 + e \sum_{i=1}^Z \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{E}(t) + V, \quad (1.43)$$

gdje je $\mathbf{E}(t)$ vektor jačine električnog polja. U četvrtom ili Kramersovom geidžu je

$$\Phi_4 = \frac{e}{m\hbar} \sum_{i=1}^Z \int_{-\infty}^t \mathbf{p}_i \cdot \mathbf{A}(t') dt' + \frac{Ze^2}{2m\hbar} \int_{-\infty}^t A^2(t') dt'. \quad (1.44)$$

Ako uzmemo u obzir relaciju

$$\exp(i\Phi_4) \mathbf{r}_j \exp(-i\Phi_4) = \mathbf{r}_j - \boldsymbol{\alpha}(t), \quad (1.45)$$

gdje je

$$\boldsymbol{\alpha}(t) = \frac{e}{m} \int_{-\infty}^t \mathbf{A}(t') dt', \quad (1.46)$$

vidimo da ova transformacija takođe može biti posmatrana kao prostorna translacija. Odgovarajući hamiltonijan je dat izrazom

$$H_4 = \frac{1}{2m} \sum_{i=1}^Z p_i^2 + V(\mathbf{r}_1 - \boldsymbol{\alpha}(t), \dots, \mathbf{r}_Z - \boldsymbol{\alpha}(t)). \quad (1.47)$$

U gornjem izrazu, $\boldsymbol{\alpha}(t)$ predstavlja koordinatu klasičnog elektrona koji osciluje u laserskom polju, bez uzimanja u obzir drugih interakcija. Hamiltonijan H_4 sadrži u sebi lasersku interakciju izraženu u obliku vremenski-zavisne prostorne translacije atomskog potencijala za $\boldsymbol{\alpha}(t)$.

Napomenimo još da pri izračunavanju fizikalnih veličina definisanih izvan laserskog polja rezultati moraju biti isti u bilo kom od gore navedena četiri geidža, pod uslovom da su proračuni egzaktni. Međutim, ako se pri proračunima koriste aproksimacije, rezultati mogu zavisiti od izbora geidža.

1.4 Greenov operator i formalizam S-matrice

Pošto je lasersko polje vremenski-zavisno, i totalni hamiltonijan koji opisuje dati proces u laserskom polju je zavisan od vremena. Zato moramo primijeniti vremenski formalizam teorije rasijanja i definisati vremenski-zavisne Greenove operatore [3, 4]. U razmatranjima koja slijede, koristit ćemo Diracovu

bra-ket notaciju i nećemo raditi u konkretnoj reprezentaciji. Odgovarajuća Schrödingerova jednačina glasi

$$\left[i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - H(t) \right] |\Psi(t)\rangle = 0, \quad (1.48)$$

gdje je hamiltonijan $H(t)$ oblika

$$H(t) = H_0(t) + V. \quad (1.49)$$

Interakcija laserskog polja sa česticama je uključena u $H_0(t)$, dok je interakcija između samih čestica opisana sa V . Vremenski-zavisani Greenov operator $G^{(\pm)}(t', t)$ može se definisati pomoću jednačine

$$\left[i\hbar \frac{\partial}{\partial t'} - H(t') \right] G^{(\pm)}(t', t) = \delta(t' - t), \quad (1.50)$$

uz početne uslove

$$G^{(+)}(t', t) = 0, \quad t' < t, \quad (1.51)$$

$$G^{(-)}(t', t) = 0, \quad t' > t. \quad (1.52)$$

Djelovanje Greenovog operatora na vektor $|\Psi(t)\rangle$ je definisano relacijom

$$\pm i\hbar G^{(\pm)}(t', t) |\Psi(t)\rangle = |\Psi(t')\rangle \Theta[\pm(t' - t)], \quad (1.53)$$

gdje je Θ step-funkcija za koju vrijedi

$$\Theta(\tau) = \begin{cases} 1, & \tau > 0 \\ 0, & \tau < 0 \end{cases} \quad ; \quad \frac{d\Theta(\tau)}{d\tau} = \delta(\tau). \quad (1.54)$$

Greenov operator se može predstaviti u obliku

$$G^{(\pm)}(t', t) = \mp \frac{i}{\hbar} \Theta[\pm(t' - t)] \sum_n |\Psi_n(t')\rangle \langle \Psi_n(t)|, \quad (1.55)$$

pri čemu su $|\Psi_n(t)\rangle$ vlastiti vektori totalnog hamiltonijana koji čine potpun skup, tj. vrijede relacije

$$\sum_n |\Psi_n(t)\rangle \langle \Psi_n(t)| = 1, \quad H(t) |\Psi_n(t)\rangle = E_n |\Psi_n(t)\rangle. \quad (1.56)$$

Suma u jednačinama (1.55) i (1.56) podrazumijeva sumiranje po diskretnim i integraciju po kontinualnim stanjima. Analogno gornjim razmatranjima, uvest ćemo operator $G_0^{(\pm)}(t', t)$. Polazimo od Schrödingerove jednačine

$$\left[i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - H_0(t) \right] |\chi(t)\rangle = 0. \quad (1.57)$$

Greenov operator $G_0^{(\pm)}(t', t)$, koji odgovara hamiltonijanu H_0 , je definisan jednačinom

$$\left[i\hbar \frac{\partial}{\partial t'} - H_0(t') \right] G_0^{(\pm)}(t', t) = \delta(t' - t), \quad (1.58)$$

uz iste početne uslove kao u slučaju operatora $G^{(\pm)}(t', t)$. Slijedeći analogiju sa totalnim operatorom $G^{(\pm)}(t', t)$, djelovanje operatora $G_0^{(\pm)}(t', t)$ na vektor $|\chi(t)\rangle$ je dato izrazom

$$\pm i\hbar G_0^{(\pm)}(t', t)|\chi(t)\rangle = |\chi(t')\rangle \Theta[\pm(t' - t)]. \quad (1.59)$$

Operator $G_0^{(\pm)}(t', t)$ se može napisati kao

$$G_0^{(\pm)}(t', t) = \mp \frac{i}{\hbar} \Theta[\pm(t' - t)] \sum_n |\chi_n(t')\rangle \langle \chi_n(t)|, \quad (1.60)$$

gdje su $|\chi_n(t)\rangle$ vlastiti vektori hamiltonijana $H_0(t)$ koji čine potpun skup, a suma podrazumijeva sumiranje po diskretnim i integraciju po kontinualnim stanjima. Veza između operatora $G^{(\pm)}(t', t)$ i $G_0^{(\pm)}(t', t)$ je data sljedećom integralnom jednačinom:

$$G^{(\pm)}(t', t) = G_0^{(\pm)}(t', t) + \int_{-\infty}^{\infty} G_0^{(\pm)}(t', t'') V G^{(\pm)}(t'', t) dt''. \quad (1.61)$$

Valjanost gornje jednačine se lako može provjeriti ako se ona uvrsti u jednačinu (1.50). Analogno se može pokazati da je

$$G^{(\pm)}(t', t) = G_0^{(\pm)}(t', t) + \int_{-\infty}^{\infty} G^{(\pm)}(t', t'') V G_0^{(\pm)}(t'', t) dt''. \quad (1.62)$$

Napomenimo još da se rješenje Schrödingerove jednačine (1.48) može napisati u obliku

$$|\Psi^{(\pm)}(t')\rangle = |\chi(t')\rangle + \int_{-\infty}^{\infty} G_0^{(\pm)}(t', t) V |\Psi^{(\pm)}(t)\rangle dt, \quad (1.63)$$

što se lako može provjeriti, ako se integralna jednačina (1.63) uvrsti u Schrödingerovu jednačinu (1.48) i upotrijebe jednačine (1.49), (1.57) i (1.58). Takođe se može pokazati da je i integralna jednačina

$$|\Psi^{(\pm)}(t')\rangle = |\chi(t')\rangle + \int_{-\infty}^{\infty} G^{(\pm)}(t', t) V |\chi(t)\rangle dt \quad (1.64)$$

rješenje Schrödingerove jednačine (1.48).

Teorija rasijanja se može formulirati na dva načina. U prvom se uvodi evolucioni operator $U(t', t)$, a u drugom Greenov operator $G(t', t)$. Razmotrit

ćemo ukratko oba pristupa. Uvedimo evolucioni operator $U(t', t)$ pomoću relacije

$$|\Psi(t')\rangle = U(t', t)|\Psi(t)\rangle. \quad (1.65)$$

Ovaj operator ima osobinu unitarnosti koja se dobije iz zahtjeva očuvanja norme, tj. iz zahtjeva da $\langle\Psi(t)|\Psi(t)\rangle = 1$ vodi na $\langle\Psi(t')|\Psi(t')\rangle = 1$, gdje je $t' \geq t$. Takođe je

$$U^\dagger(t', t) = U(t, t'), \quad U(t', t) = U(t', t'')U(t'', t). \quad (1.66)$$

Iz jednačina (1.48) i (1.65) slijedi da evolucioni operator zadovoljava diferencijalnu jednačinu

$$\left[i\hbar \frac{\partial}{\partial t'} - H(t') \right] U(t', t) = 0, \quad (1.67)$$

uz početni uslov $U(t, t) = I$. To je ekvivalentno integralnoj jednačini

$$U(t', t) = I - \frac{i}{\hbar} \int_t^{t'} H(t'')U(t'', t) dt''. \quad (1.68)$$

Analogno uvodimo evolucioni operator $U_0(t', t)$, čije je djelovanje na vektore $|\chi(t)\rangle$ određeno relacijom

$$|\chi(t')\rangle = U_0(t', t)|\chi(t)\rangle. \quad (1.69)$$

Smatramo da mnogo prije sudara i mnogo poslije sudara nema interakcije V između čestica, pa se tada sistem može predstaviti vektorima stanja $|\chi_n(t)\rangle$. Neka vektor $|\chi_i(t)\rangle$ opisuje stanje sistema mnogo prije sudara ($t \rightarrow -\infty$), a vektor $|\chi_f(t)\rangle$ stanje sistema mnogo poslije sudara ($t \rightarrow +\infty$). Sada možemo uvesti Møllerove talasne operatore $\Omega^{(\pm)}$. Definirat ćemo ih na sljedeći način:

$$\Omega^{(\pm)} = \lim_{t' \rightarrow \mp\infty} U(t, t')U_0(t', t), \quad \Omega^{(\pm)\dagger} = \lim_{t' \rightarrow \mp\infty} U_0(t, t')U(t', t). \quad (1.70)$$

Vidimo da operatori $\Omega^{(\pm)}$ pretvaraju vlastite vektore $|\chi_n(t)\rangle$ operatora $H_0(t)$ u odgovarajuće vlastite vektore $|\Psi_n^{(\pm)}(t)\rangle$ totalnog hamiltonijana $H(t)$. Dakle, imamo

$$|\Psi_n^{(\pm)}(t)\rangle = \Omega^{(\pm)}|\chi_n(t)\rangle = \lim_{t' \rightarrow \mp\infty} U(t, t')U_0(t', t)|\chi_n(t)\rangle. \quad (1.71)$$

Konkretno, djelovanje Møllerovih operatora na asimptotske vektore stanja $|\chi_i(t)\rangle$ i $|\chi_f(t)\rangle$ je dato relacijama

$$|\Psi_i^{(+)}(t)\rangle = \Omega^{(+)}|\chi_i(t)\rangle = \lim_{t' \rightarrow -\infty} U(t, t')U_0(t', t)|\chi_i(t)\rangle, \quad (1.72)$$

$$|\Psi_f^{(-)}(t)\rangle = \Omega^{(-)}|\chi_f(t)\rangle = \lim_{t' \rightarrow +\infty} U(t, t')U_0(t', t)|\chi_f(t)\rangle. \quad (1.73)$$

Konačno, definisat ćemo operator, odnosno matricu rasijanja. Operator rasijanja S predstavljamo kao kompoziciju dva Møllerova operatora, tj.

$$\begin{aligned} S &= \Omega^{(-)\dagger}\Omega^{(+)} = \lim_{\substack{t' \rightarrow +\infty \\ t \rightarrow -\infty}} U_0(t'', t')U(t', t'')U(t'', t)U_0(t, t'') \\ &= \lim_{\substack{t' \rightarrow +\infty \\ t \rightarrow -\infty}} U_0(t'', t')U(t', t)U_0(t, t''). \end{aligned} \quad (1.74)$$

Matrični element operatora S između asimptotskih vektora stanja $|\chi_i\rangle$ i $|\chi_f\rangle$ je određen relacijom

$$S_{fi} \equiv \langle \chi_f | S | \chi_i \rangle = \langle \chi_f | \Omega^{(-)\dagger} \Omega^{(+)} | \chi_i \rangle = \langle \Psi_f^{(-)} | \Psi_i^{(+)} \rangle, \quad (1.75)$$

gdje smo pri dobijanju zadnje jednakosti iskoristili relaciju (1.72) i dirakovski-adjungovani oblik relacije (1.73). Primjenom tih istih relacija, matrični element se može predstaviti kao

$$\begin{aligned} S_{fi} &= \lim_{\substack{t' \rightarrow +\infty \\ t \rightarrow -\infty}} \langle \chi_f(t'') | U_0(t'', t')U(t', t'')U(t'', t)U_0(t, t'') | \chi_i(t'') \rangle \\ &= \lim_{\substack{t' \rightarrow +\infty \\ t \rightarrow -\infty}} \langle \chi_f(t') | U(t', t) | \chi_i(t) \rangle. \end{aligned} \quad (1.76)$$

Iz jednačine (1.75) vidimo da matrični element S_{fi} predstavlja amplitudu vjerovatnoće da se sistem opisan vektorom stanja $|\Psi_i^{(+)}\rangle$ nađe u stanju opisanom vektorom $|\Psi_f^{(-)}\rangle$. S obzirom da vektor $|\Psi_i^{(+)}\rangle$ potiče od asimptotskog vektora stanja $|\chi_i\rangle$, a vektor $|\Psi_f^{(-)}\rangle$ od asimptotskog vektora stanja $|\chi_f\rangle$, jasno je da matrični element S_{fi} ustvari predstavlja amplitudu vjerovatnoće da se sistem koji je u dalekoj prošlosti bio u početnom stanju opisanom vektorom $|\chi_i\rangle$ nađe u konačnom stanju opisanom vektorom $|\chi_f\rangle$.

Drugi način da se predstave matrični elementi operatora S zasniva se na korištenju Greenovog operatora. Nađimo vezu između evolucionog operatora $U(t', t)$ i Greenovog operatora $G^{(\pm)}(t', t)$. Ako usporedimo relacije (1.53) i (1.65), nalazimo da je

$$U(t', t) = \begin{cases} i\hbar G^{(+)}(t', t), & t' > t \\ -i\hbar G^{(-)}(t', t), & t' < t. \end{cases} \quad (1.77)$$

Nas zanima retardirani Greenov operator $G^{(+)}(t', t)$. Kada gornji rezultat uvrstimo u relaciju (1.76), imamo

$$S_{fi} = i\hbar \lim_{\substack{t' \rightarrow +\infty \\ t \rightarrow -\infty}} \langle \chi_f(t') | G^{(+)}(t', t) | \chi_i(t) \rangle. \quad (1.78)$$

1.5 Volkovljev vektor stanja

Razmotrimo slučaj rasijanja elektrona na lokalnom (kratkodometnom) potencijalu. Elektron iz vakuuma ulazi u lasersko polje i kreće se u njemu neko vrijeme, prije nego što se rasije na potencijalu V . Ako se koristi dipolna aproksimacija i radi u sistemu centra masa, Schrödingerova jednačina za vektor stanja $|\Psi(t)\rangle$ elektrona koji se kreće u laserskom polju i na koga djeluje potencijal V , u interakcionoj reprezentaciji glasi

$$\left\{ i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{2m} [\mathbf{p} + e\mathbf{A}(t)]^2 - V \right\} |\Psi(t)\rangle = 0, \quad (1.79)$$

gdje je \mathbf{p} operator impulsa elektrona, a vektorski potencijal $\mathbf{A}(t)$ laserskog polja je dat izrazom (1.34). Pretpostavlja se da je elektron, prije ulaska u područje djelovanja statičkog potencijala V , prešao u laserskom polju put koji je mnogo duži od talasne dužine laserskog polja. To znači da se stanje elektrona prije rasijanja ne može opisati ravnim talasom, kao što se to radi u standardnoj teoriji potencijalnog rasijanja. U ovom slučaju, stanje elektrona se opisuje vektorom $|\chi_{\mathbf{q}}(t)\rangle$ (gdje je \mathbf{q} impuls elektrona), koji predstavlja rješenje Schrödingerove jednačine

$$\left\{ i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{2m} [\mathbf{p} + e\mathbf{A}(t)]^2 \right\} |\chi_{\mathbf{q}}(t)\rangle = 0. \quad (1.80)$$

Rješenje jednačine (1.80) naziva se Volkovljevo rješenje, jer je rješenje analognog problema za Diracovu jednačinu našao Volkov [5].

Jasno je da Volkovljev vektor stanja $|\chi_{\mathbf{q}}(t)\rangle$ zavisi od izbora geidža. Naprimjer, ako radimo u $\mathbf{p} \cdot \mathbf{A}$ geidžu, jednačina (1.80) postaje

$$\left[i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \frac{e}{m} \mathbf{p} \cdot \mathbf{A}(t) \right] |\chi_{\mathbf{q}}(t)\rangle = 0. \quad (1.81)$$

Rješenje ove jednačine je oblika

$$|\chi_{\mathbf{q}}(t)\rangle = |\mathbf{q}\rangle \exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} [E_{\mathbf{q}}t + \mathbf{q} \cdot \boldsymbol{\alpha}(t)] \right\}, \quad (1.82)$$

gdje je $E_{\mathbf{q}} = q^2/(2m)$ kinetička energija elektrona, $\boldsymbol{\alpha}(t)$ je dato izrazom (1.46), a $|\mathbf{q}\rangle$ je ravni talas

$$\langle \mathbf{r} | \mathbf{q} \rangle = (2\pi)^{-3/2} \exp \left(\frac{i}{\hbar} \mathbf{q} \cdot \mathbf{r} \right), \quad (1.83)$$

koji odgovara elektronu impulsa \mathbf{q} , kada se on nalazi van područja djelovanja laserskog polja i potencijala V . Ako izaberemo $\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}$ geidž, odgovarajuća Schrödingerova jednačina glasi

$$\left[i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - e\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}(t) \right] |\chi_{\mathbf{q}}(t)\rangle = 0, \quad (1.84)$$

a njeno rješenje je

$$|\chi_{\mathbf{q}}(t)\rangle = |\mathbf{q} + e\mathbf{A}(t)\rangle \exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} [E_{\mathbf{q}}t + \mathbf{q} \cdot \boldsymbol{\alpha}(t) + \mathcal{U}(t)] \right\}. \quad (1.85)$$

U posljednjoj jednačini, veličina $\mathcal{U}(t)$ je data sa

$$\mathcal{U}(t) = \frac{e^2}{2m} \int_{-\infty}^t \mathbf{A}^2(t') dt', \quad (1.86)$$

a ravni talas $|\mathbf{q} + e\mathbf{A}(t)\rangle$ odgovara elektronu van područja interakcije, čiji je impuls pomjeren za $e\mathbf{A}(t)$ u odnosu na impuls \mathbf{q} .

1.6 Atomske jedinice

U teorijskim razmatranjima koja će biti predstavljena u narednim poglavljima koristit ćemo atomski sistem jedinica. Zato ćemo sada uvesti atomske jedinice koje su relevantne za naše proračune. Postoji šest osnovnih atomskih jedinica [6]. To su atomske jedinice za dužinu, masu, električni naboj, ugaoni moment i energiju, te konstanta elektrostatičke sile (Coulombova konstanta). Svaka od ovih atomskih jedinica je izražena preko odgovarajuće fizikalne konstante. To znači da imamo šest konstanti, a numerička vrijednost svake od njih je 1 u atomskom sistemu jedinica. Od ovih šest konstanti, samo su četiri međusobno nezavisne, što znači da se preostale dvije mogu izraziti preko njih. Prema tome, da bi svih šest konstanti normirali na 1, dovoljno je da bilo koje četiri od njih normiramo na 1. Mi ćemo izabrati sljedeće četiri konstante: masu mirovanja elektrona m , elementarni naboj e , Plancovu konstantu podijeljenu sa 2π , tj. $\hbar = h/(2\pi)$, i Coulombovu konstantu $1/(4\pi\epsilon_0)$. Izvedimo sada atomske jedinice za dužinu i energiju. Kao polaznu osnovu uzimamo stacionarnu Schrödingerovu jednačinu za jednoelektronski jon, predstavljenu u SI-jedinicama i koordinatnoj reprezentaciji. Ona glasi:

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla_{\mathbf{r}}^2 - \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} \right) \Psi = E\Psi. \quad (1.87)$$

Uvođenjem bezdimenzionalnih promjenljivih

$$\rho = ra, \quad \varepsilon = \frac{E}{W}, \quad (1.88)$$

i njihovim uvrštavanjem u jednačinu (1.87), imamo

$$\left(\nabla_{\rho}^2 + 2 \frac{Ze^2m}{4\pi\varepsilon_0\hbar^2\rho} a + \frac{2ma^2}{\hbar^2} W\varepsilon \right) \Psi = 0. \quad (1.89)$$

Izaberimo atomsku jedinicu za dužinu a_0 ($a_0 = Za$) i atomsku jedinicu za energiju W_0 ($W_0 = W/Z^2$) iz uslova

$$\frac{Ze^2m}{4\pi\varepsilon_0\hbar^2} a = 1, \quad \frac{ma^2}{\hbar^2} W = 1. \quad (1.90)$$

Slijedi da je

$$a_0 = \frac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}{me^2}, \quad W_0 = \frac{\hbar^2}{ma_0^2} = \frac{me^4}{(4\pi\varepsilon_0\hbar)^2}. \quad (1.91)$$

Uzimajući u obzir da je $\hbar = h/(2\pi) = 1.054 \cdot 10^{-34}$ Js, masa mirovanja elektrona $m = 9.109 \cdot 10^{-31}$ kg, elementarni naboj $e = 1.602 \cdot 10^{-19}$ C i dielektrična konstanta vakuuma $\varepsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12}$ C²/(Nm²), jednačine (1.91) daju brojne vrijednosti atomske jedinice za dužinu a_0 (tzv. prvi Bohrov radius u atomu vodika) i atomske jedinice za energiju W_0 :

$$a_0 = 0.529 \cdot 10^{-10} \text{ m}, \quad W_0 = 4.359 \cdot 10^{-18} \text{ J} = 27.211 \text{ eV}. \quad (1.92)$$

Jednačina (1.87) tada ima oblik

$$\left(\nabla_{\rho}^2 + \frac{2}{\rho} + 2\varepsilon \right) \Psi = 0. \quad (1.93)$$

U atomskom sistemu jedinica je $e = \hbar = m = 4\pi\varepsilon_0 = 1$. Naime, kada se u jednačinu (1.87) uvrsti $e = \hbar = m = 4\pi\varepsilon_0 = 1$, tada se, za $Z = 1$ (vodikov atom), dobije jednačina (1.93). Atomska jedinica za energiju jednaka je dvostrukoj energiji jonizacije vodikovog atoma (1 Rydberg), tj.

$$W_0 = 2 \text{ Ry} = 27.211 \text{ eV}. \quad (1.94)$$

Atomske jedinice za sve ostale fizikalne veličine mogu se izraziti preko osnovnih atomskih jedinica koje smo odabrali. Atomsku jedinicu za jačinu električnog polja definišemo kao jačinu elektrostatičkog polja koje stvara čestica sa elementarnim nabojem e na rastojanju Bohrovog radijusa a_0 :

$$E_A = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 a_0^2} = 5.142 \cdot 10^{11} \text{ V/m}. \quad (1.95)$$

Atomska jedinica za intenzitet elektromagnetskog polja je

$$I_A = \frac{\varepsilon_0 c E_A^2}{2} = 3.509 \cdot 10^{20} \text{ W/m}^2 = 3.509 \cdot 10^{16} \text{ W/cm}^2. \quad (1.96)$$

Atomska jedinica za brzinu je data brzinom elektrona u prvoj Bohrovoj orbiti

$$v_0 = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0\hbar} = 2.187 \cdot 10^6 \text{ m/s}. \quad (1.97)$$

Atomska jedinica za vrijeme se dobije iz atomskih jedinica za brzinu i dužinu

$$t_0 = \frac{a_0}{v_0} = \frac{(4\pi\varepsilon_0)^2\hbar^3}{me^4} = 2.418 \cdot 10^{-17} \text{ s}. \quad (1.98)$$

Konačno, ugaona frekvencija je određena sa

$$\omega_0 = \frac{1}{t_0} = \frac{me^4}{(4\pi\varepsilon_0)^2\hbar^3} = 4.134 \cdot 10^{16} \text{ s}^{-1}. \quad (1.99)$$

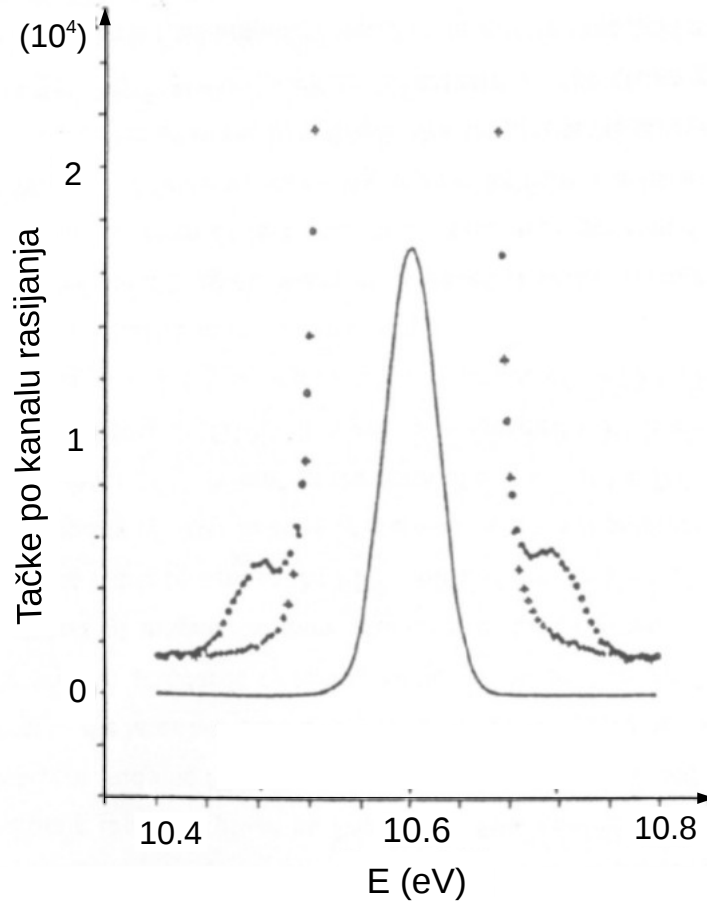
Poglavlje 2

Elektron-atomsko rasijanje

Rasijanje elektrona na atomu je proces u kojem, u skladu sa klasičnom teorijom elektromagnetizma, elektron koji se rasijava na atomu ili jonu u prisustvu polja apsorbira ili emituje zračenje prilikom ubrzavanja, odnosno usporavanja, respektivno. Sa druge strane, u skladu sa kvantnom elektrodinamikom, ovo se svodi na vjerovatnoću apsorpcije, odnosno emisije fotona. Ukoliko govorimo o rasijanju elektrona na atomu u slabom elektromagnetnom polju, govorimo o procesu jednofotonske apsorpcije ili emisije. U takvim poljima, vjerovatnoća višefotonske emisije ili apsorpcije je veoma mala, što se može povezati sa činjenicom da takvi procesi nisu bili primijećeni prije otkrića jakih lasera. U procesima rasijanja elektrona na atomu u nekom polju imamo kontinualna stanja sistema elektrona i atoma, a to se objašnjava slobodno-slobodnim prelazima, tj. FFT (Free-Free Transitions).

2.1 Eksperimenti elektron-atomskog rasijanja

Jedan od prvih eksperimenata elektron-atomskog rasijanja koji je izvršen je bio eksperiment koji su izveli Andrick i Langhans [7, 8]. Radili su sa atomima Ar kao metama, energija upadnih elektrona je bila $E_i = 10.6$ eV, a ugao rasijanja θ je bio fiksiran na 160° . laser talasne dužine $\lambda = 10600$ nm, a energija fotona je bila $\hbar\omega = 117$ meV sa intenzitetom polja od $I = 2 \cdot 10^3$ Wcm⁻². Prvo je posmatrano rasijanje elektrona na atomu bez prisustva laserskog polja. Dobijen je samo jedan maksimum, koji se javio pri energiji rasijanih elektrona $E_f = 10.6$ eV, što znači da je on poticao od elastičnog rasijanja. Kada je uključen laser, pojavila su se dva manja maksimuma za $E_f = E_i \pm 117$ meV. Ovo je prikazano na slici 2.1. Ta dva maksimuma predstavljaju elektrone koji su apsorbirali ($E_f = E_i + 117$ meV), odnosno emitovali ($E_f = E_i - 117$ meV) jedan foton. Pomenuti eksperiment je dao



Slika 2.1: Eksperiment Andricka i Langhansa [8]. Energetski spektar elektrona rasijanih pod uglom $\theta = 160^\circ$ na atomima Ar u odsustvu (križići) i prisustvu (kružići) CO_2 lasera (intenzitet $I = 2 \cdot 10^3 \text{ Wcm}^{-2}$, energija fotona $\hbar\omega = 117 \text{ meV}$). Puna kriva predstavlja redukciju elastičnog maksimuma na $1/500$ njegove stvarne vrijednosti.

prvi direktan dokaz postojanja FFT procesa u laserskom polju. Važno je spomenuti još eksperiment Wallbanka i saradnika [9], u kome su kao mete korišteni atomi Ar, a energija upadnih elektrona je iznosila 10.55 eV . Ovaj eksperiment je pokazao da je za vrijednosti intenziteta laserskog polja iznad $2 \cdot 10^6 \text{ Wcm}^{-2}$ porast diferencijalnog presjeka sa intenzitetom sporiji od linear-nog, što je bilo u skladu sa predviđanjima neperturbativnih teorija razvijenih za niske frekvencije [10].

2.2 Teorija i numerički rezultati

Za naše teorijske proračune ćemo iskoristiti aproksimaciju jakog polja, tj. SFA (Strong-Field Approximation). Ovaj postupak polazi od toga da u procesima u jakom laserskom polju postoji faza procesa u kojoj se djelovanje atomskom potencijala na elektron može zanemariti, tj. elektron se u toj fazi može posmatrati kao čestica koja se kreće samo pod uticajem laserskog polja. Dakle, S -matricu ćemo ovdje razvijati u Bornov red po atomskom potencijalu V , prilikom čega ćemo u obzir uzeti samo prva dva člana u razvoju. Interakcija elektrona sa laserskim poljem će biti uzeta u obzir preko Volkovljevih vektora stanja. Kao i u cijelom radu, proračune vršimo u atomskom sistemu jedinica koji smo uveli u prvom poglavlju. Polazimo od S -matrice oblika

$$S_{fi} = i \lim_{\substack{t' \rightarrow +\infty \\ t \rightarrow -\infty}} \langle \chi_{\mathbf{k}_f}(t') | G(t', t) | \chi_{\mathbf{k}_i}(t) \rangle, \quad (2.1)$$

gdje su početno i krajnje stanje $|\chi_{\mathbf{k}_i}\rangle$ i $|\chi_{\mathbf{k}_f}\rangle$ ustvari Volkovljevi vektori stanja, a G je totalni retardirani Greenov operator koji zadovoljava Lippmann-Schwingerovu jednačinu

$$G(t', t) = G_x(t', t) + \int_{-\infty}^{\infty} G(t', t'') V G_0(t'', t) dt'', \quad (2.2)$$

pri čemu je G_0 Volkovljev Greenov operator koji se može napisati u obliku

$$G_0(t', t) = -i \Theta(t' - t) \int |\chi_{\mathbf{q}}(t')\rangle \langle \chi_{\mathbf{q}}(t) | d\mathbf{q}. \quad (2.3)$$

Pomenuti Volkovljevi vektori stanja su zapravo rješenja vremenski-zavisne Schrödingerove jednačine sa Hamiltonijanom $H_0(t)$ u kojem je uključena interakcija elektrona sa primijenjenim laserskim poljem. Potencijal V će u našem slučaju opisivati interakciju elektrona sa atomskom metom. Volkovljevi vektori stanja u $\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}$ geidžu su dati sa

$$|\chi_{\mathbf{k}}(t)\rangle = |\mathbf{k} + \mathbf{A}(t)\rangle \exp \{-i [\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\alpha}(t) + \mathcal{U}(t) + E_k t]\}, \quad (2.4)$$

gdje je \mathbf{k} impuls elektrona, $E_k = k^2/2$ konačna kinetička energija elektrona, $\mathbf{A}(t)$ vektorski potencijal laserskog polja sa vektorom električnog polja $\mathbf{E}(t) = -\partial \mathbf{A}(t)/\partial t$, dok je

$$\boldsymbol{\alpha}(t) = \int_{-\infty}^t \mathbf{A}(t') dt', \quad \mathcal{U}(t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^t \mathbf{A}^2(t') dt' = \mathcal{U}_1(t) + U_P t. \quad (2.5)$$

U drugoj od jednačina (2.5), veličina $\mathcal{U}_1(t)$ predstavlja vremenski periodičan dio od $\mathcal{U}(t)$, a veličina U_P je u literaturi poznata kao ponderomotorna

energija elektrona u laserskom polju. U slučaju monohromatskog (jednomodnog) laserskog polja je $U_P = A_0^2/4$. Uopšte uzevši, za polihromatsko (višemodno) lasersko polje je $U_P = (A_{0_1}^2 + A_{0_2}^2 + \dots + A_{0_m}^2)/4$, gdje je m broj modova oscilovanja polja.

Uvrštanjem jednačine (2.2) u izraz za S -matricu, uz korištenje uslova ortogonalnosti početnog i krajnjeg stanja, dobijemo naredni izraz

$$S_{fi} = -i \int_{-\infty}^{\infty} dt \langle \chi_{\mathbf{k}_f}(t) | V | \chi_{\mathbf{k}_i}(t) \rangle - i \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_t^{\infty} dt' \langle \chi_{\mathbf{k}_f}(t') | V G_0(t', t) V | \chi_{\mathbf{k}_i}(t) \rangle + \dots \quad (2.6)$$

Zanemarujući u razvoju (2.6) članove trećeg i višeg reda po potencijalu V (tj. zadržavajući u njemu samo prva dva člana) i koristeći opštu relaciju

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt \int_t^{\infty} dt' f(t', t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_0^{\infty} d\tau f(t + \tau, t), \quad (2.7)$$

dobijamo

$$S_{fi} = -i \int_{-\infty}^{\infty} dt \langle \chi_{\mathbf{k}_f}(t) | V | \chi_{\mathbf{k}_i}(t) \rangle - i \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_0^{\infty} d\tau \langle \chi_{\mathbf{k}_f}(t + \tau) | V G_0(t + \tau, t) V | \chi_{\mathbf{k}_i}(t) \rangle. \quad (2.8)$$

Daljnim uvrštavanjem jednačine za $G_0(t, t + \tau)$ u posljednju jednačinu dobijemo

$$S_{fi} = -i \int_{-\infty}^{\infty} dt \langle \chi_{\mathbf{k}_f}(t) | V | \chi_{\mathbf{k}_i}(t) \rangle - \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_0^{\infty} d\tau \int d\mathbf{q} \langle \chi_{\mathbf{k}_f}(t + \tau) | V | \chi_{\mathbf{q}}(t + \tau) \rangle \langle \chi_{\mathbf{q}}(t) | V | \chi_{\mathbf{k}_i}(t) \rangle. \quad (2.9)$$

Jednačina (2.9) predstavlja S -matrični element za proces elektron-atomskog rasijanja. Prvi član ove jednačine opisuje proces u kojem se elektron rasijava na potencijalu V u prisustvu laserskog polja. Drugi član u ovoj jednačini predstavlja generalizaciju three-step scenarija na slučaj potencijalnog rasijanja u laserskom polju. U prvom koraku, elektron sa početnim impulsom \mathbf{k}_i rasijava se na atomu u laserskom polju u nekom trenutku t . U drugom koraku, rasijani elektron kreće se u laserskom polju u vremenskom intervalu $(t, t + \tau)$ i vraća se nazad do atoma u trenutku $t + \tau$. U trećem, posljednjem koraku, elektron se u trenutku $t + \tau$ ponovo rasijava na atomu i odlazi u asimptotsko područje, gdje biva detektovan sa konačnim impulsom \mathbf{k}_f . Ovaj

proces se naziva rescattering. U toku tog procesa elektron može dobiti dosta veću energiju u odnosu na proces direktnog rasijanja. Samim tim, očekuje se pojava visokoenergetskog platoa u spektru konačnih energija elektrona. U jednačini (2.9) integraciju vršimo po svim vremenima prvog rasijanja t , svim impulsima \mathbf{q} koje elektron može imati u toku kretanja unutar laserskog polja, kao i po svim vremenima τ . Koristeći eksplicitni oblik (2.4) Volkovljevih vektora stanja, kao i činjenicu da je Fourierov transformat potencijala $V(\mathbf{r})$ dat relacijom

$$V_{\mathbf{K}} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int V(\mathbf{r}) \exp(i\mathbf{K} \cdot \mathbf{r}) d\mathbf{r}, \quad (2.10)$$

jednačina (2.9) se može napisati kao

$$\begin{aligned} S_{fi} = & -i \int_{-\infty}^{\infty} dt \exp \{ i[\boldsymbol{\alpha}(t) \cdot (\mathbf{k}_f - \mathbf{k}_i) + (E_f - E_i)t] \} \\ & \times \left\{ V_{\mathbf{k}_i - \mathbf{k}_f} - i \int_0^{\infty} d\tau \exp [i(\tau/2)(\mathbf{k}_f - \mathbf{k}_s)^2] \right. \\ & \left. \times \int d\mathbf{q} \exp [-i(\tau/2)(\mathbf{q} - \mathbf{k}_s)^2] V_{\mathbf{q} - \mathbf{k}_f} V_{\mathbf{k}_i - \mathbf{q}} \right\}, \end{aligned} \quad (2.11)$$

pri čemu smo uveli novu veličinu

$$\mathbf{k}_s = -\frac{1}{\tau} \int_t^{t+\tau} \mathbf{A}(t') dt' = \frac{1}{\tau} [\boldsymbol{\alpha}(t) - \boldsymbol{\alpha}(t + \tau)] \quad (2.12)$$

kao impuls elektrona u međustanju. Integral po impulsu \mathbf{q} se može izračunati metodom sedlaste tačke, a rezultat glasi

$$\begin{aligned} & \int d\mathbf{q} \exp [-i(\tau/2)(\mathbf{q} - \mathbf{k}_s)^2] V_{\mathbf{q} - \mathbf{k}_f} V_{\mathbf{k}_i - \mathbf{q}} \\ & = \left(\frac{2\pi}{i\tau} \right)^{3/2} \exp \left(-\frac{i}{2\tau} \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{q}^2} \right) V_{\mathbf{q} - \mathbf{k}_f} V_{\mathbf{k}_i - \mathbf{q}} \Bigg|_{\mathbf{q} = \mathbf{k}_s}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Primjenom ovog integrala, jednačina (2.11) postaje

$$S_{fi} = -i \int_{-\infty}^{\infty} \exp [i(E_f - E_i)t] \mathcal{T}_{fi}(\omega t) dt, \quad (2.14)$$

gdje je

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{fi}(\omega t) = & \exp [i\boldsymbol{\alpha}(t) \cdot (\mathbf{k}_f - \mathbf{k}_i)] \left\{ V_{\mathbf{k}_i - \mathbf{k}_f} - i \int_0^{\infty} d\tau \left(\frac{2\pi}{i\tau} \right)^{3/2} \right. \\ & \left. \times \exp [i(\tau/2)(\mathbf{k}_f - \mathbf{k}_s)^2] \exp \left(-\frac{i}{2\tau} \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{q}^2} \right) V_{\mathbf{q} - \mathbf{k}_f} V_{\mathbf{k}_i - \mathbf{q}} \right\} \Bigg|_{\mathbf{q} = \mathbf{k}_s} \end{aligned} \quad (2.15)$$

vremenski periodična funkcija sa periodom $T = 2\pi/\omega$. Uvažavajući pretpostavku da je $\tau \gg 1$, primjenjujemo sljedeću aproksimaciju

$$\exp\left(-\frac{i}{2\tau}\frac{\partial^2}{\partial \mathbf{q}^2}\right) \approx 1. \quad (2.16)$$

Kada ovu aproksimaciju uzmemo u obzir u jednačini (2.15), imamo

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{fi}(\omega t) = \exp[i\boldsymbol{\alpha}(t) \cdot (\mathbf{k}_f - \mathbf{k}_i)] & \left\{ V_{\mathbf{k}_i - \mathbf{k}_f} - i \int_0^\infty d\tau \left(\frac{2\pi}{i\tau}\right)^{3/2} \right. \\ & \left. \times \exp[i(\tau/2)(\mathbf{k}_f - \mathbf{k}_s)^2] V_{\mathbf{k}_s - \mathbf{k}_f} V_{\mathbf{k}_i - \mathbf{k}_s} \right\}. \quad (2.17) \end{aligned}$$

Budući da je $\mathcal{T}_{fi}(\omega t)$ vremenski periodična funkcija, ona se može razviti u Fourierov red, pa imamo

$$\mathcal{T}_{fi}(\omega t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} T_{fi}(n) \exp(-in\omega t), \quad (2.18)$$

$$T_{fi}(n) = \frac{1}{T} \int_0^T \mathcal{T}_{fi}(\omega t) \exp(in\omega t) dt. \quad (2.19)$$

Matrični elementi S_{fi} i $T_{fi}(n)$ se mogu povezati relacijom

$$S_{fi} = -2\pi i \sum_{n > -E_i/\omega}^{\infty} \delta(E_f - E_i - n\omega) T_{fi}(n), \quad (2.20)$$

gdje delta-funkcija izražava zakon očuvanja energije. Općenito, zakon očuvanja energije za elektron-atomsko rasijanje ima oblik

$$E_f + W_f = E_i + W_i + n\omega, \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots), \quad (2.21)$$

gdje su $E_i(W_i)$ i $E_f(W_f)$ energije elektrona (atoma) u početnom i konačnom stanju, respektivno, ω je ugaona frekvencija oscilovanja vanjskog polja, dok je n broj apsorbiranih ($n > 0$) ili emitovanih ($n < 0$) fotona u procesu rasijanja. Pri elastičnom rasijanju je $n = 0$. U toku procesa rasijanja, atom može doći u pobuđeno stanje ($W_f > W_i$) ili ostati neperturbovan ($W_f = W_i$). U slučaju neperturbovanog atoma ili rasijanja na meti bez strukture (potencijalno rasijanje), jednačina (2.21) postaje

$$E_f = E_i + n\omega, \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \quad (2.22)$$

U izrazu 2.20 suma po n uključuje sve otvorene kanale rasijanja za koje je $E_f = E_i + n\omega > 0$. Matrični element $T_{fi}(n)$ opisuje slobodno-slobodne prelaze (FFT) elektrone uz razmjenu n fotona sa laserskim poljem. Ukoliko je $n > 0$ radi se o apsorpciji n fotona u procesu elektron-atomskog rasijanja, a ukoliko je $n < 0$ dolazi do laserom stimulisanog višefotonskog bremsstrahlung-a [12].

Diferencijalni presjek rasijanja elektrona početnog impulsa \mathbf{k}_i na lokalnom potencijalu $V(\mathbf{r})$, uz razmjenu n fotona sa laserskim poljem i konačni impuls elektrona \mathbf{k}_f , je dat kao [4, 13]

$$\frac{d\sigma_{fi}(n)}{d\Omega} = (2\pi)^4 \frac{\mathbf{k}_f}{\mathbf{k}_i} |T_{fi}(n)|^2. \quad (2.23)$$

Za sferno-simetrični problem, rezultati ne zavise od polarnog ugla ϕ_f konačnog impulsa elektrona $\mathbf{k}_f \equiv (k_f, \theta_f, \phi_f)$, tako da je $d\sigma_{fi}(n) = d\sigma_{fi}(\theta_f, n)$. Da bismo izračunali diferencijalni presjek rasijanja (2.23) moramo prvo primjenom numeričkih metoda izračunati matrični element $T_{fi}(n)$, dat jednačinom (2.19). Integral po vremenu t u ovoj jednačini se može izračunati primjenom metoda brze Fourierove transformacije. U jednačini (2.19) se pod znakom integrala pojavljuje i periodična funkcija $\mathcal{T}_{fi}(\omega t)$. Ova funkcija data je jednačinom (2.17) i sadrži integral po vremenu τ , koji se može izračunati numeričkom integracijom.

Konkretan oblik matričnog elementa $T_{fi}(n)$ zavisi naravno od izbora potencijala rasijanja. Uzmimo kao model potencijala rasijanja V sumu polarizacionog potencijala V_P i statičkog potencijala V_S , tako da je $V = V_P + V_S$. U procesu rasijanja dolazi do polarizacije atomske mete Coulombovim poljem upadnog elektrona. Ovaj efekat se može uzeti u obzir pomoću polarizacionog potencijala

$$V_P(r) = -\frac{\alpha_P}{2(r^2 + d^2)^2}, \quad (2.24)$$

gdje je α_P elektrostatička dipolna polarizabilnost atoma, a parametar d je povezan sa α_P i nabojem atomskog jezgra Z pomoću formule $d^4 = \alpha_P / (2Z^{1/3})$ [14]. Fourierov transformat polarizacionog potencijala V_P je

$$V_{\mathbf{K}}^{(P)} = -\frac{\alpha_P}{16\pi d} \exp(-Kd). \quad (2.25)$$

Statički potencijal V_S opisuje interakciju dolazećeg elektrona sa jezgrom i elektronskim oblakom atoma. Primjer statičkog potencijala kratkog dometa koji može dobro poslužiti u opisu procesa elektron-atomskog rasijanja je Yukawin potencijal. U ovom slučaju, kao statički potencijal uzet ćemo dvostruki Yukawin potencijal [15]

$$V_S(r) = -\frac{Z}{H} \frac{e^{-r/D}}{r} [1 + (H-1)e^{-Hr/D}], \quad (2.26)$$

gdje je $H = DZ^{0.4}$. Vrijednosti parametra D i elektrostatičke dipolne polarizabilnosti za pojedine atome i jone mogu se naći u tabeli (2.1). Fourierov

Tablica 2.1: Vrijednosti elektrostatičke dipolne polarizabilnosti α_P [16] i parametra D [17] dvostrukog Yukawinog potencijala za atome plemenitih gasova sa nabojem atomskog jezgra Z i energijom jonizacije I_P .

Atom	Z	I_P	α_P	D
He	2	24.59	1.383	0.215
Ne	10	21.56	2.68	0.500
Ar	18	15.76	11.08	0.862
Kr	36	14.00	16.74	0.689
Xe	54	12.13	27.06	0.940

transformat potencijala $V_S(r)$, datog jednačinom (2.26), glasi

$$V_{\mathbf{K}}^{(S)} = -\frac{Z}{2\pi^2 H} \left[\frac{1}{K^2 + D^{-2}} + \frac{H-1}{K^2 + \left(\frac{H+1}{D}\right)^2} \right]. \quad (2.27)$$

Pretpostavimo da se proces rasijanja događa u linearno polarizovanom monohromatskom laserskom polju čiji je vektorski potencijal dat sa

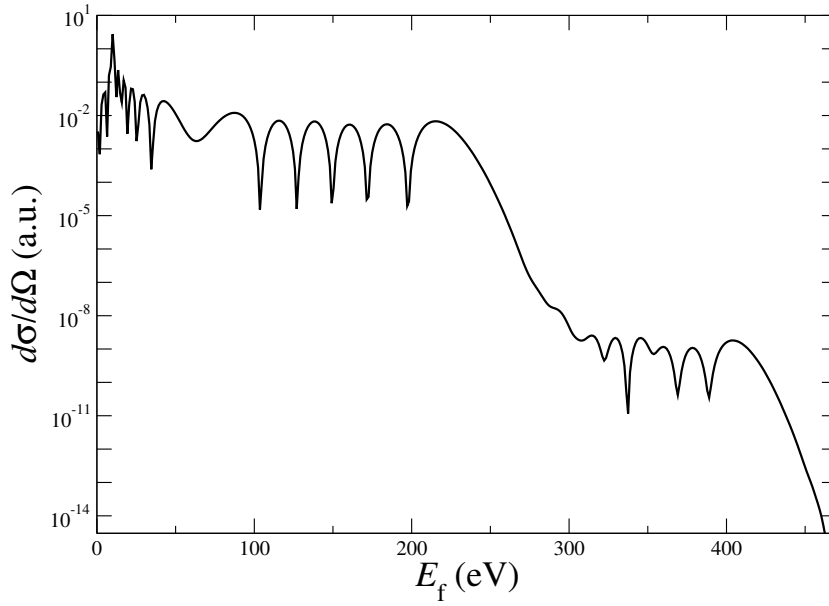
$$\mathbf{A}(t) = \hat{\mathbf{e}} A_0 \cos \omega t, \quad (2.28)$$

gdje je A_0 amplituda vektorskog potencijala, a $\hat{\mathbf{e}}$ jedinični vektor koji određuje smjer polarizacije laserskog polja. Takođe, pretpostavimo da je impuls upadnog elektrona \mathbf{k}_i istoga smjera kao i lasersko polje, a ugao između impulsa rasijanog elektrona \mathbf{k}_f i smjera laserskog polja označimo sa θ_f , tj.

$$\hat{\mathbf{k}}_i \parallel \hat{\mathbf{e}}, \quad \hat{\mathbf{k}}_i \cdot \hat{\mathbf{e}} = 1, \quad \hat{\mathbf{k}}_f \cdot \hat{\mathbf{e}} = \cos \theta_f. \quad (2.29)$$

Nakon što smo predstavili teoriju, primjenom numeričkih metoda računat ćemo diferencijalne presjeke rasijanja elektrona na atomima u laserskom polju sa vektorskim potencijalom (2.28). Na slici 2.2 je prikazan diferencijalni presjek rasijanja elektrona na atomu He kao funkcija energije fotona E_f , u prisustvu laserskog polja jačine $I = 4 \cdot 10^{14} \text{ Wcm}^{-2}$ i talasne dužine $\lambda = 1060 \text{ nm}$. Početna kinetička energija elektrona je $E_i = 10 \text{ eV}$, a ugao rasijanja je

$\theta_f = 0^\circ$. Na slici 2.2 možemo primijetiti dva platoa koja imaju oscilatornu strukturu i nagle padove (cutoff). Prvi plato je povezan sa direktnim rasijanjem i vidimo da je energija na tom mjestu otprilike $E_f = 229$ eV, dok drugi plato potiče od rescatteringa i energija cutoffa ima vrijednost oko $E_f = 416$ eV. Uočavamo da je drugi plato za otprilike 5-6 redova niži u odnosu na prvi plato.



Slika 2.2: Diferencijalni presjek rasijanja elektrona na atomu He kao funkcija energije fotona u prisustvu laserskog polja jačine $I = 4 \cdot 10^{14} \text{ Wcm}^{-2}$ i talasne dužine $\lambda = 1060$ nm. Početna kinetička energija elektrona je $E_i = 10$ eV, a ugao rasijanja je $\theta_f = 0^\circ$.

Sada ćemo iskoristiti klasičnu analizu da bismo odredili tačne položaje ovih cutoffova u spektru rasijanih elektrona u laserskom polju. Klasična analiza se svodi na sistem jednačina po vremenima i impulsima koje zapravo predstavljaju zakone očuvanja energije, te uslov da se elektron vrati do jezgra atoma. Prvi član koji se pojavljuje u izrazu (2.11) kojim je dat S -matrični element je vezan za direktno rasijanje, pa samim tim sadrži samo integral po vremenu rasijanja t . Prvi izvod po vremenu rasijanja t argumenta podintegralne eksponencijalne funkcije mora biti jednak nuli, pa imamo

$$[\mathbf{k}_i + \mathbf{A}(t)]^2 = [\mathbf{k}_f + \mathbf{A}(t)]^2. \quad (2.30)$$

Dobivena jednačina zapravo predstavlja zakon očuvanja energije u trenutku rasijanja t i ona će nam poslužiti za određivanje cutoffa prvog platoa koji odgovara direktnom rasijanju. Drugi član u jednačini (2.11) je vezan za

rescattering i prema tome sadrži dva jednodimenzionalna integrala po vremenima t i τ , kao i trodimenzionalni integral po elektronskom impulsu \mathbf{q} . Izvodi $\partial/\partial t$, $\partial/\partial \tau$ i $\partial/\partial \mathbf{q}$ izraza koji se pojavljuju u eksponencijalnom dijelu podintegralne funkcije moraju biti jednaki nuli.

$$\frac{\partial S}{\partial \tau} = -\frac{1}{2}[\mathbf{k}_f + \mathbf{A}(t + \tau)]^2 + \frac{1}{2}[\mathbf{q} + \mathbf{A}(t + \tau)]^2 = 0. \quad (2.31)$$

Uvrštavanjem $\mathbf{q} = \mathbf{k}_s$ i malim sređivanjem ove jednačine dobijemo

$$\frac{1}{2}[\mathbf{k}_f + \mathbf{A}(t + \tau)]^2 = \frac{1}{2}[\mathbf{k}_s + \mathbf{A}(t + \tau)]^2. \quad (2.32)$$

Sada tražimo izvod po vremenu t eksponencijalnog dijela podintegralne funkcije drugog člana jednačine (2.11).

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -\frac{1}{2}[\mathbf{k}_f + \mathbf{A}(t + \tau)]^2 + \frac{1}{2}[\mathbf{q} + \mathbf{A}(t + \tau)]^2 - \frac{1}{2}[\mathbf{q} + \mathbf{A}(t)]^2 + \frac{1}{2}[\mathbf{k}_i + \mathbf{A}(t)]^2 = 0. \quad (2.33)$$

Korištenjem jednačine (2.32) i zamjenom $\mathbf{q} = \mathbf{k}_s$ dobije se

$$\frac{1}{2}[\mathbf{k}_i + \mathbf{A}(t)]^2 = \frac{1}{2}[\mathbf{k}_s + \mathbf{A}(t)]^2. \quad (2.34)$$

Konačno, iz uslova $\partial S/\partial \mathbf{q} = 0$ imamo

$$\frac{\partial S}{\partial \mathbf{q}} = \int_0^{t+\tau} dt' [\mathbf{q} + \mathbf{A}(t')] - \int_0^t dt' [\mathbf{q} + \mathbf{A}(t')] = 0. \quad (2.35)$$

Sređivanjem se dobije

$$\int_t^{t+\tau} dt' [\mathbf{q} + \mathbf{A}(t')] = 0. \quad (2.36)$$

Dakle, dobili smo sljedeće jednačine

$$[\mathbf{k}_i + \mathbf{A}(t)]^2 = [\mathbf{k}_s + \mathbf{A}(t)]^2, \quad (2.37)$$

$$[\mathbf{k}_f + \mathbf{A}(t + \tau)]^2 = [\mathbf{k}_s + \mathbf{A}(t + \tau)]^2, \quad (2.38)$$

$$\int_t^{t+\tau} dt' [\mathbf{q} + \mathbf{A}(t')] = 0. \quad (2.39)$$

Jednačina (2.37) predstavlja zakon očuvanja energije za prvo rasijanje u trenutku t , a jednačina (2.38) izražava uslov da se elektron nakon vremena τ vrati do jezgra atoma. Posljednja od ovih jednačina, (2.39) predstavlja zakon očuvanja energije za drugo rasijanje u trenutku $t + \tau$. Ove tri jednačine,

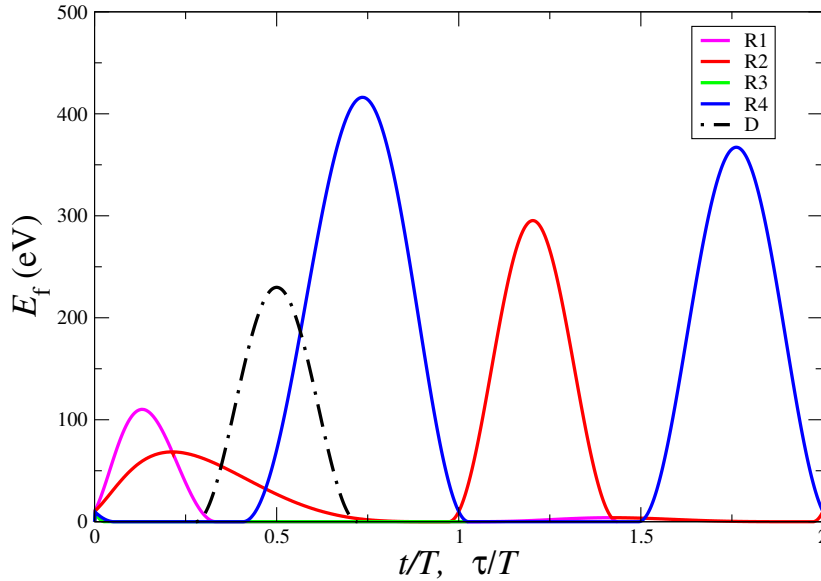
(2.37)–(2.39) nam omogućavaju nalaženje cutoffova drugog platoa u procesu elektron-atomskog rasijanja. Za lasersko polje sa vektorskim potencijalom (2.28) i geometriju rasijanja (2.29), jednačina (2.30) daje [19]

$$n_{\max}\omega = 4U_P \max \left(\cos^2 \theta_f \pm \gamma_i \mp \cos \theta_f \sqrt{\cos^2 \theta_f \pm 2\gamma_i + \gamma_i^2} \right), \quad (2.40)$$

gdje je parametar $\gamma_i = k_i/A_0 = \sqrt{E_i/(2U_P)}$ analogan Keldyshevom parametru u teoriji jonizacije tuneliranjem [20], a n_{\max} je vrijednost cutoffa prvog platoa, tj. maksimalan broj fotona koje elektron može apsorbovati iz laserskog polja u procesu direktnog rasijanja. Specijalno, za uglove rasijanja $\theta_f = \pi$ i $\theta_f = 0$, dobijamo sljedeći izraz [21]:

$$n_{\max}\omega = 8U_P(1 \pm \gamma_i) = 8U_P \pm 4\sqrt{2E_iU_P}. \quad (2.41)$$

Ako grafički predstavimo ovisnost energije E_f od odnosa t/T za direktno rasijanje i τ/T za rescattering, možemo zaključiti da kvantno-mehanički rezultati koje smo prije dobili daju veoma dobro slaganje sa klasičnom analizom. Za

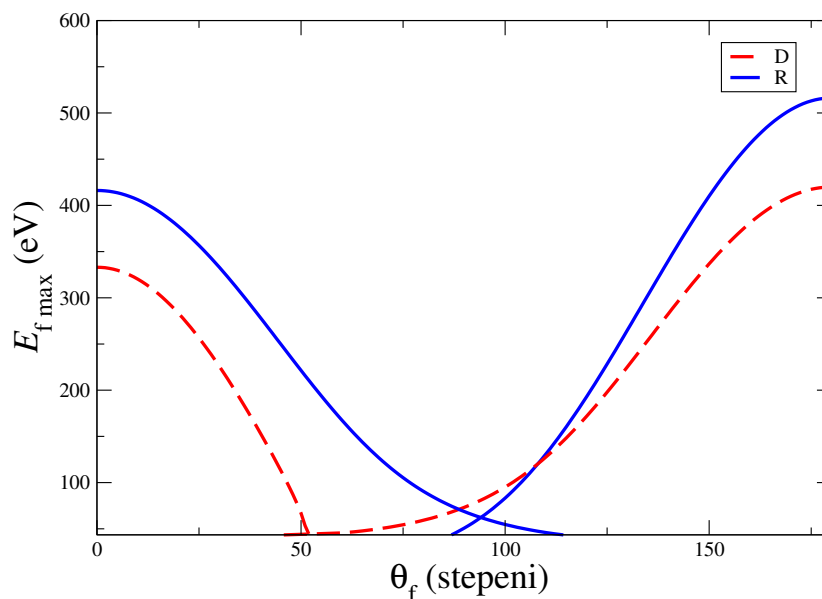


Slika 2.3: Grafički prikaz rezultata klasične analize direktnog rasijanja i rescatteringa. Parametri rasijanja i laserskog polja su isti kao na slici 2.2. Energija fotona E_f predstavljena je kao funkcija vremena t , za direktno rasijanje, odnosno vremena τ za rescattering, izraženog u optičkim periodima T .

rescattering rješavanjem sistema jednačina po t i τ se dobiju četiri rješenja za E_f , koja je moguće grafički predstaviti. Pri tome ćemo na istom grafikonu

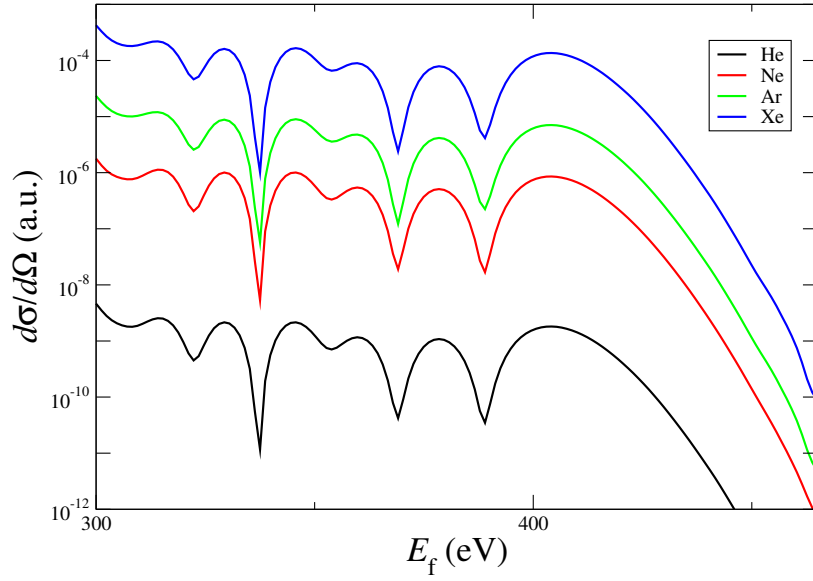
uključiti i rješenje za E_f koje se dobije rješavanjem jednačine za direktno rasijanje. Rezultati su prikazani na slici 2.3.

Na slici 2.4 je predstavljena veličina $E_{f \max}$ kao funkcija ugla rasijanja θ_f , za direktno rasijanje.



Slika 2.4: Klasični rezultati za maksimalnu energiju fotona $E_{f \max}$, kao funkcija ugla rasijanja θ_f . Parametri rasijanja i laserskog polja su isti kao na slici 2.2, a ugao θ_f je dat u stepenima. Rezultati za direktno rasijanje su prikazani isprekidanom linijom, a za rescattering punom linijom.

Razmotrimo sada zavisnost platoa od potencijala rasijanja. Visine oba platoa u spektru diferencijalnog presjeka rasijanja zavise od vrste atomskih meta, tj. od parametara potencijala rasijanja koji se koristi kao model. Posebno visina drugog platoa jako zavisi od vrste atomskog gasa čiji se atomi koriste kao mete u procesu rasijanja. Na slici 2.5 prikazan je samo visokoenergetski dio spektara, koji odgovara drugom platou, za neke od plemenitih gasova (He, Ne, Ar, Xe). Spektri su normirani tako da su maksimumi njihovih platoa direktnog rasijanja isti. Na taj način, u mogućnosti smo da uporedimo relativne visine platoa dvostrukog rasijanja za He, Ne, Ar i Xe. Kao što se i moglo očekivati, najviši je plato koji odgovara rasijanju na atomima Xe, jer je broj centara rasijanja najveći za Xe. Najniži je plato koji odgovara rasijanju na atomima He. Visine platoa dvostrukog rasijanja opadaju od Xe do He za više od dva reda veličine. To znači da su izgledi za eksperimentalnu potvrdu postojanja drugog platoa veći, ako se kao mete uzmu masivniji atomi plemenitih gasova. Takođe, na slici 2.5 može se primijetiti da oblik



Slika 2.5: Diferencijalni presjek rasijanja elektrona na raznim atomima (He, Ne, Ar i Xe) kao funkcija energije fotona u prisustvu laserskog polja jačine $I = 4 \cdot 10^{14} \text{ Wcm}^{-2}$ i talasne dužine $\lambda = 1060 \text{ nm}$. Ugao rasijanja je $\theta_f = 0^\circ$.

platoa i položaj njegovog cutoffa ne zavise od vrste atomskog gasa. Jedino visina platoa zavisi od atomskog potencijala.

Postojanje drugog platoa u energetskom spektru rasijanih elektrona još uvijek nije eksperimentalno potvrđeno. Glavni razlog tome je činjenica da je drugi plato koji potiče od rescatteringa za 6 redova veličine niži od prvog platoa koji je posljedica direktnog rasijanja. Drugim riječima, vjerovatnoća rescatteringa je vrlo mala. To otežava detekciju ovih visokoenergetskih elektrona u realnoj situaciji kakvu imamo u eksperimentu. Ipak, s obzirom da je drugi plato već registrovan u eksperimentima jonizacije iznad praga, logično je pretpostaviti da on zaista postoji i u procesu elektron-atomskog rasijanja.

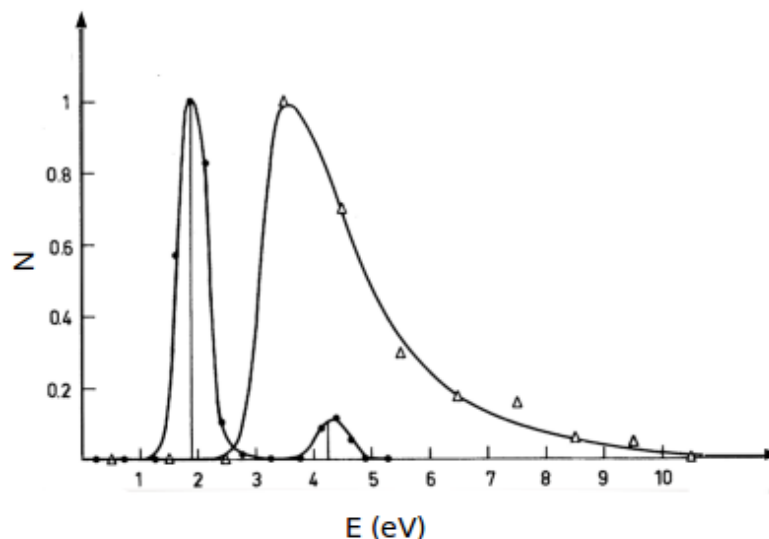
Poglavlje 3

Jonizacija iznad praga

Atom koji se nalazi u vanjskom elektromagnetskom polju može se jonizovati ako vanjski elektron u atomu (tj. elektron u vezanom stanju sa najvišom energijom) apsorbira dovoljan broj fotona iz polja. Jasno je da broj fotona koje elektron mora apsorbirati da bi došlo do jonizacije zavisi od energije jonizacije datog atoma, ali i od energije fotona vanjskog polja. Drugim riječima postoji određeni energetski prag za svaki atom ispod kojeg jonizacija nije moguća. Za jonizaciju su potrebna polja visokog intenziteta. Samim tim je jasno da je proučavanje ovog procesa počelo tek nakon otkrića prvih pulsnihi lasera (sredinom šezdesetih godina prošlog vijeka).

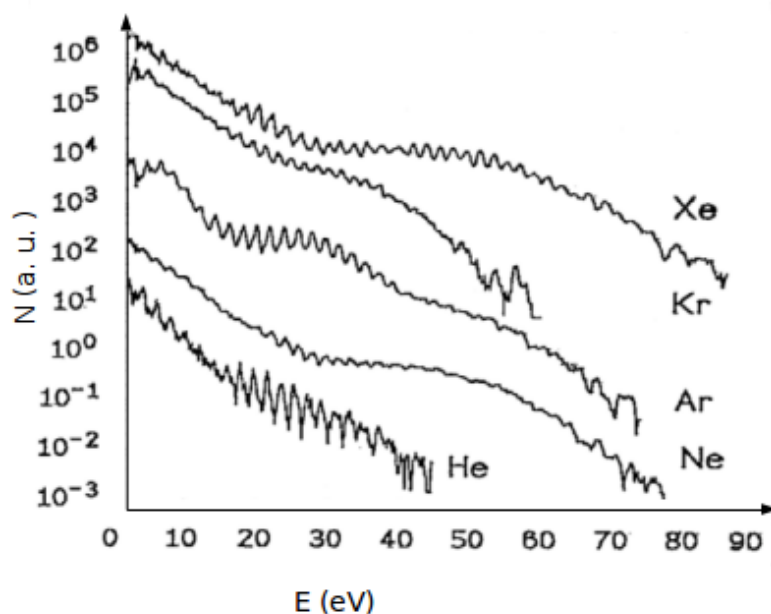
3.1 Eksperimenti jonizacije iznad praga

Prve eksperimente su izveli Delone i saradnici [22], te grupa predvođena Mainfrayem i Manusom [23]. Rezultati ovih eksperimenata su predstavljeni na slici 3.1, na kojoj se jasno vidi da pri jedanaestofotonskoj jonizaciji energetski spektar emitovanihi elektrona ima samo jedan maksimum i ne pokazuje nikakvu diskretnu strukturu, dok šestofotonska jonizacija daje energetski spektar sa dva maksimuma. Sa daljnim povećanjem snage laserskih izvora, došlo je do otkrića procesa u kojem je jonizovani elektron apsorbirao veći broj fotona od onoga koji je neophodan za njegovu jonizaciju, što je nazvano jonizacijom iznad praga, odnosno ATI (above-threshold ionization). Taj proces su prvi otkrili Agostini i saradnici 1979. godine [24], tako što su detektovali elektrone oslobođene šestofotonskom i jedanaestofotonskom jonizacijom atoma Xe. U procesu jedanaestofotonske jonizacije korišteno je lasersko polje intenziteta $I = 4 \cdot 10^{13} \text{ Wcm}^{-2}$, a energija fotona $\hbar\omega = 1.17 \text{ eV}$ (osnovna frekvencija), dok je šestofotonska jonizacija dobijena pomoću laserskog polja intenziteta $I = 8 \cdot 10^{12} \text{ Wcm}^{-2}$ i energije fotona $\hbar\omega = 2.34$



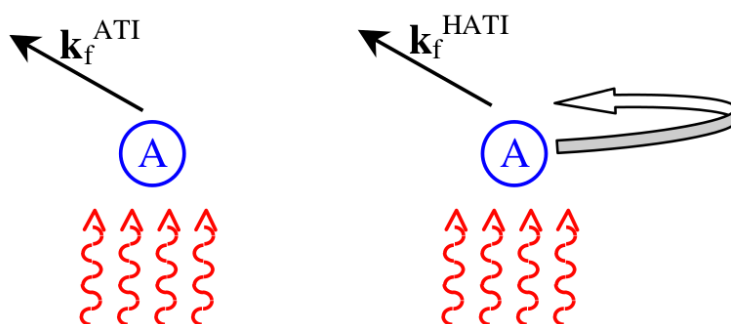
Slika 3.1: Energetski spektri elektrona emitovanih u procesu višefotonske jonizacije Xe, za lasersko polje intenziteta $I = 4 \cdot 10^{13} \text{ Wcm}^{-2}$ i energije fotona $\hbar\omega = 1.17 \text{ eV}$ (trokutići), te za lasersko polje intenziteta $I = 8 \cdot 10^{12} \text{ Wcm}^{-2}$ i energije fotona $\hbar\omega = 2.34 \text{ eV}$ (kružići). Krive su provučene kroz eksperimentalne tačke.

eV (drugi harmonik). Rezultati ovih eksperimenata koji su prikazani na slici 3.1 su pokazali da pri jedanaestofotonskoj jonizaciji energetski spektar emitovanih elektrona ima samo jedan maksimum i ne pokazuje nikakvu diskretnu strukturu, dok šestofotonska jonizacija daje energetski spektar sa dva maksimuma. Prvi od ova dva maksimuma potiče od elektrona koji su u procesu jonizacije apsorbovali šest fotona iz laserskog polja, a drugi maksimum odgovara elektronima koji su apsorbovali sedam fotona. Jasno je da drugi maksimum predstavlja direktan eksperimentalni dokaz postojanja ATI procesa, jer je apsorbovan jedan foton više nego što je potrebno za jonizaciju atoma. U kasnijim eksperimentima su korišteni još snažniji izvori laserskog zračenja, pa je registrovan veći broj ATI maksimuma, ali i neke nove strukture u energetskom spektru jonizovanih elektrona. Naime, opaženi su nizovi ATI maksimuma približno iste visine. Ti nizovi su podsjećali na platoe, pa su tako i nazvani. Plato-strukture u energetskim spektrima jonizovanih elektrona prvi su opazili Paulus i saradnici [25]. Njihovi eksperimentalni rezultati su prikazani na slici 3.2. Pretpostavka je bila da je za postojanje ovih platoa odgovoran proces koji se sastoji iz tri koraka (tzv. three-step metod). Prvi korak je jonizacija atoma, pri čemu se u laserskom polju pojavljuje slobodni elektron. U drugom koraku, oslobođeni elektron se kreće u laserskom polju koje ga vraća nazad do matičnog jona. Konačno, u trećem koraku, elektron



Slika 3.2: Energetski spektri ATI elektrona za atome plemenitih gasova u laserskom polju talasne dužine $\lambda = 630$ nm i intenziteta: $I = 3 \cdot 10^{14}$ Wcm $^{-2}$ za He i $I = 2 \cdot 10^{14}$ Wcm $^{-2}$ za ostale plemenite gasove.

se rasijava na matičnom jonu i napušta lasersko polje. Ovaj proces se naziva rescattering. Zaključak ove priče je da platoi u ATI spektrima dolaze od rescatteringa, za koji se pokazalo da je takođe odgovoran i za pojavu platoa u spektrima elektron-atomskog rasijanja. Ovaj proces jonizacije iznad praga, u kojem se javlja efekat rescatteringa, često se naziva HATI (high-order above-threshold ionization). Teorijska razmatranja ovog procesa su pokazala da je



Slika 3.3: Shematski prikaz ATI (lijeva slika) i HATI (desna slika) procesa.

maksimalna energija elektrona u HATI procesu data relacijom [27]

$$E_{p,\max} = 10.007 U_P + 0.538 I_P, \quad (3.1)$$

gdje je U_P tzv. ponderomotorna energija, a I_P jonizaciona energija. Ovaj izraz predstavlja zakon cutoffa za plato koji potiče od HATI procesa. Na slici 3.3 je predstavljen shematski prikaz ATI (lijevo) i HATI (desno) procesa.

3.2 Teorija

Za naše teorijske proračune ćemo koristiti tzv. KFR model (Keldysh-Faisal-Reiss) koji je određen prvim članom u Bornovom razvoju S -matrice po atomskom potencijalu V , pri čemu će interakcija jonizovanog elektrona sa laserskim poljem biti uzeta u obzir implicitno pomoću Volkovljevog vektora stanja. Naime, KFR model je ustvari aproksimacija jakog polja. Međutim, za dobivanje drugog platoa unutar teorijskih proračuna, neophodno je u obzir uzeti i članove višeg reda koji uključuju rescattering. Dakle, koristimo aproksimaciju jakog polja i uzimamo u obzir prva dva člana u Bornovom razvoju S -matričnog elementa po potencijalu V , pri čemu je za potencijal uzet potencijal kratkog dometa [26]. Potrebno je još napomenuti da će svo izvođenje biti razmatrano u atomskom sistemu jedinica. Poći ćemo od S -matrice oblika

$$S_{fi} = i \lim_{\substack{t' \rightarrow +\infty \\ t \rightarrow -\infty}} \langle \Phi_f(t') | G(t', t) | \Phi_i(t) \rangle, \quad (3.2)$$

pri čemu početno i krajnje stanje ($\langle \Phi_f(t) |$ i $|\Phi_i(t)\rangle$) zavise od graničnih uslova, a G je totalni retardirani Greenov operator koji zadovoljava Lippmann-Schwingerovu jednačinu

$$G(t', t) = G_x(t', t) + \int_{-\infty}^{\infty} G(t', t'') V_x G_x(t'', t) dt''. \quad (3.3)$$

U našem slučaju, odnosno slučaju jonizacije, početno stanje je rješenje Schrödingerove jednačine sa atomskim potencijalom veze V . Konačno stanje u vremenu t je dato kao

$$\langle \Phi_f^{(-)}(t) | = i \langle \Phi_f(\infty) | G^{(+)}(\infty, t). \quad (3.4)$$

Uvrštanjem jednačine (3.3) u izraz za S -matricu i stavljanjem da je $V_x = H_L$, pri čemu je H_L Hamiltonijan interakcije sa laserskim poljem, uz korištenje jednačine (3.4) i uslova ortogonalnosti početnog i krajnjeg stanja, dobijamo

$$S_{fi} = i \lim_{\substack{t' \rightarrow +\infty \\ t \rightarrow -\infty}} \int_t^{t'} dt \langle \Phi_f^{(-)}(t) | H_L(t) | \Phi_i(t) \rangle. \quad (3.5)$$

Ovo je jedan od mogućih oblika S -matričnog elementa za jonizaciju iznad praga [2, 28]. Naš potencijal V djeluje u dijelu procesa u kojem se elektron rasijava na jezgru atoma i smatramo ga vremenski-zavisnim. Kada jednačinu (3.4) uvrstimo u jednačinu (3.5) i iskoristimo Lippmann-Schwingerovu jednačinu (3.3), stavljajući u njoj $V_x = V$, dobijamo

$$S_{fi} = \int_{-\infty}^{\infty} dt \langle \Phi_f(\infty) | G_x(\infty, t) H_L(t) | \Phi_i(t) \rangle + \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_t^{\infty} dt' \langle \Phi_f(\infty) | G(\infty, t') V G_x(t', t) H_L(t) | \Phi_i(t) \rangle. \quad (3.6)$$

Uvodimo stanja $\Phi_{f,x}^{(-)}$ koja su rješenja vremenski-zavisne Schrödingerove jednačine sa hamiltonijanom $H_x = \mathbf{k}_f^2/2 + H_L$ i koja zadovoljavaju relaciju

$$\langle \Phi_{f,x}^{(-)}(t) | = i \langle \Phi_f(\infty) | G_x^{(+)}(\infty, t), \quad (3.7)$$

pa iz jednačine (3.6) slijedi:

$$S_{fi} = -i \int_{-\infty}^{\infty} dt \langle \Phi_{f,x}^{(-)}(t) | H_L(t) | \Phi_i(t) \rangle - i \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_t^{\infty} dt' \langle \Phi_{f,x}^{(-)}(t') | V G_x(t', t) H_L(t) | \Phi_i(t) \rangle. \quad (3.8)$$

Sada ćemo dati mali osvrt na fizikalnu interpretaciju dobijenog rezultata. Usljed interakcije sa laserskim poljem, atom koji se nalazi u početnom stanju se jonizuje, a nakon toga se oslobođeni elektron kreće u laserskom polju. Pri tome može doći do toga da jonizovani elektron napusti ovo polje pri čemu se može i eksperimentalno opaziti. Ovaj proces je opisan prvim članom u jednačini (3.8). Međutim, može doći i do vraćanja jonizovanog elektrona nazad do matičnog jona i rasijanja na njemu. To rasijanje je modelirano kratkodosežnim potencijalom V . Nakon rasijanja, elektron napušta polje i odlazi u asimptotsko područje, gdje može biti detektovan. Ovaj proces je poznat pod imenom rescattering i opisan je drugim članom jednačine (3.8). Konačno stanje $\Phi_{f,x}^{(-)}$ odgovara elektronu koji se kreće pod uticajem laserskog polja, pa ga možemo aproksimirati pomoću Volkovljevog stanja $\chi_{\mathbf{k}_f}$. Takođe, Greenov operator G_x zamijenimo Volkovljevim Greenovim operatorom

$$G_x(t', t) \approx G_L(t', t) = -i \Theta(t' - t) \int |\chi_{\mathbf{q}}(t')\rangle \langle \chi_{\mathbf{q}}(t)| d\mathbf{q}. \quad (3.9)$$

Proračune vršimo u $\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}$ geidžu, pa je $H_L(t) = \mathbf{r} \cdot \mathbf{E}(t)$. Uzimajući sve ovo

u obzir i koristeći opštu relaciju (2.7), jednačina (3.8) postaje

$$S_{fi} = -i \int_{-\infty}^{\infty} dt \langle \chi_{\mathbf{k}_f}(t) | \mathbf{r} \cdot \mathbf{E}(t) | \Phi_i(t) \rangle - \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_0^{\infty} d\tau \int d\mathbf{q} \langle \chi_{\mathbf{k}_f}(t + \tau) | V | \chi_{\mathbf{q}}(t + \tau) \rangle \langle \chi_{\mathbf{q}}(t) | \mathbf{r} \cdot \mathbf{E}(t) | \Phi_i(t) \rangle. \quad (3.10)$$

Vrijeme τ zovemo vrijeme povratka, jer se elektron jonizuje u trenutku t , a rasijava se na atomu u trenutku $t + \tau$. Početno stanje je dato sa $|\Phi_i(t)\rangle = |\psi_i\rangle \exp(iE_0t)$, gdje su $|\psi_i\rangle$ i E_0 osnovno stanje i energija jonizacije atoma, respektivno. Volkovljevi vektori stanja u $\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}$ geidžu su dati relacijom (2.4). Uvrštavanjem eksplicitnih izraza za početno stanje i Volkovljeve vektore stanja u jednačinu (3.10), dobijamo

$$S_{fi} = -i \int_{-\infty}^{\infty} dt \exp \{ i[(E_f + E_0 + U_P)t + \mathbf{k}_f \cdot \boldsymbol{\alpha}(t) + \mathcal{U}_1(t)] \} \times \left\{ \langle \mathbf{k}_f + \mathbf{A}(t) | \mathbf{r} \cdot \mathbf{E}(t) | \psi_i \rangle - i \int_0^{\infty} d\tau \exp [i(\tau/2)(\mathbf{k}_f - \mathbf{k}_s)^2] \times \int d\mathbf{q} \exp [-i(\tau/2)(\mathbf{q} - \mathbf{k}_s)^2] V_{\mathbf{q}-\mathbf{k}_f} \langle \mathbf{q} + \mathbf{A}(t) | \mathbf{r} \cdot \mathbf{E}(t) | \psi_i \rangle \right\}, \quad (3.11)$$

gdje je \mathbf{k}_f konačni impuls, a $E_f = k_f^2/2$ konačna kinetička energija jonizovanog elektrona, U_P je ponderomotorna energija elektrona u laserskom polju, $\boldsymbol{\alpha}(t)$ i $\mathcal{U}_1(t)$ su dati relacijama (2.5), \mathbf{k}_s je dato relacijom (2.12), $\mathbf{A}(t)$ je vektorski potencijal laserskog polja sa vektorom električnog polja $\mathbf{E}(t) = -\partial \mathbf{A}(t)/\partial t$, dok je

$$V_{\mathbf{q}-\mathbf{k}_f} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int V(\mathbf{r}) \exp[i(\mathbf{q} - \mathbf{k}_f) \cdot \mathbf{r}] d\mathbf{r}, \quad (3.12)$$

Fourierov transformat potencijala $V = V(\mathbf{r})$. Integral po elektronskom impulsu \mathbf{q} u jednačini (3.11) se može izračunati metodom sedlaste tačke, a rezultat je [29]

$$\int d\mathbf{q} \exp [-i(\tau/2)(\mathbf{q} - \mathbf{k}_s)^2] V_{\mathbf{q}-\mathbf{k}_f} \langle \mathbf{q} + \mathbf{A}(t) | \mathbf{r} \cdot \mathbf{E}(t) | \psi_i \rangle = \left(\frac{2\pi}{i\tau} \right)^{3/2} \exp \left(-\frac{i}{2\tau} \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{q}^2} \right) V_{\mathbf{q}-\mathbf{k}_f} \langle \mathbf{q} + \mathbf{A}(t) | \mathbf{r} \cdot \mathbf{E}(t) | \psi_i \rangle \Bigg|_{\mathbf{q}=\mathbf{k}_s}. \quad (3.13)$$

Kada gornju relaciju iskoristimo u izrazu za S -matricu (3.11) i zatim primijenimo aproksimaciju (2.16), imamo

$$S_{fi} = -i \int_{-\infty}^{\infty} \exp [i(E_f + E_0 + U_P)t] \mathcal{T}_{fi}(\omega t) dt, \quad (3.14)$$

gdje je

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{fi}(\omega t) = \exp \{ i [\mathbf{k}_f \cdot \boldsymbol{\alpha}(t) + \mathcal{U}_1(t)] \} & \left\{ \langle \mathbf{k}_f + \mathbf{A}(t) | \mathbf{r} \cdot \mathbf{E}(t) | \psi_i \rangle \right. \\ & - i \int_0^\infty d\tau \left(\frac{2\pi}{i\tau} \right)^{3/2} V_{\mathbf{k}_s - \mathbf{k}_f} \langle \mathbf{k}_s + \mathbf{A}(t) | \mathbf{r} \cdot \mathbf{E}(t) | \psi_i \rangle \\ & \left. \times \exp [i(\tau/2)(\mathbf{k}_f - \mathbf{k}_s)^2] \right\} \end{aligned} \quad (3.15)$$

vremenski periodična funkcija koja se može razviti u Fourierov red, tako da vrijede relacije (2.18) i (2.19). Ako se relacija (2.18) uvrsti u jednačinu (3.14), dobije se

$$S_{fi} = -2\pi i \sum_n \delta(E_f + E_0 + U_P - n\omega) T_{fi}(n), \quad (3.16)$$

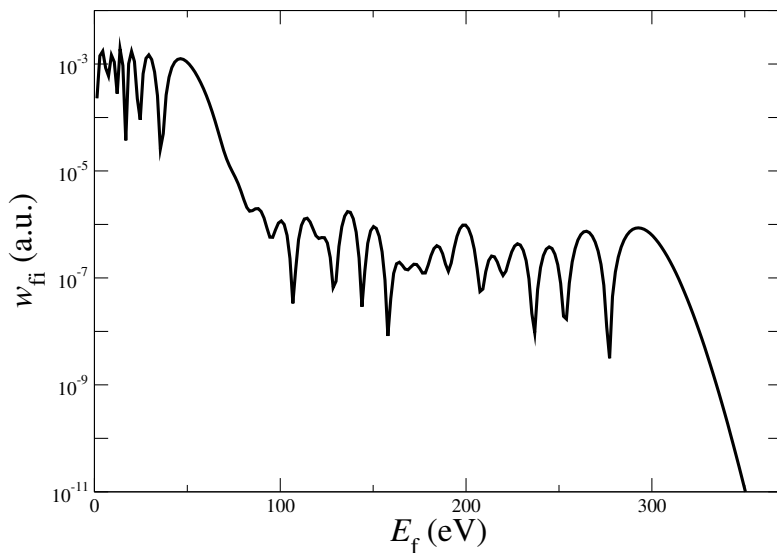
gdje je $T_{fi}(n)$ dato relacijom (2.19) i predstavlja T -matrični element za proces jonizacije u kome jonizovani elektron apsorbira n fotona iz laserskog polja, a delta-funkcija izražava zakon očuvanja energije $E_f = n\omega - E_0 - U_P$. Diferencijalna brzina jonizacije je

$$w_{fi}(n, \theta) = 2\pi k_f |T_{fi}(n)|^2, \quad (3.17)$$

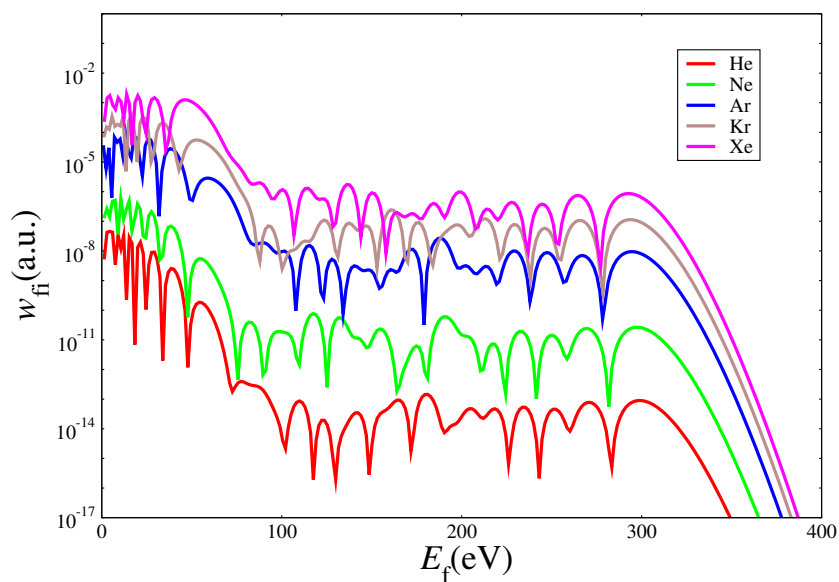
gdje je $k_f = (2E_f)^{1/2}$, a θ je ugao između konačnog impulsa elektrona \mathbf{k}_f i vektora polarizacije laserskog polja $\hat{\mathbf{e}}$.

3.3 Numerički rezultati

Diferencijalne brzine jonizacije se lako mogu izračunati numeričkom integracijom po vremenu τ , dok ćemo integral po vremenu t računati metodom brze Fourierove transformacije. Rasijanje jonizovanog elektrona na matičnom jonu modeliramo dvostrukim Yukavinim potencijalom (2.26). Smatramo da je lasersko polje monohromatsko i linearno polarizovano, sa vektorskim potencijalom (2.28). Na slici 3.4 je prikazana diferencijalna brzina jonizacije atoma Xe kao funkcija kinetičke energije elektrona u prisustvu laserskog polja intenziteta $5 \cdot 10^{14} \text{ Wcm}^{-2}$ i talasne dužine $\lambda = 800 \text{ nm}$. Ugao između konačnog impulsa elektrona \mathbf{k}_f i vektora polarizacije laserskog polja $\hat{\mathbf{e}}$ je $\theta = 0^\circ$. Dalje ćemo predstaviti rezultate za diferencijalnu brzinu jonizacije atoma He, Ne, Ar, Kr i Xe u laserskom polju intenziteta $5 \cdot 10^{14} \text{ Wcm}^{-2}$ i talasne dužine $\lambda = 800 \text{ nm}$. Ugao između konačnog impulsa elektrona \mathbf{k}_f i vektora polarizacije laserskog polja $\hat{\mathbf{e}}$ je $\theta = 0^\circ$. Ovaj primjer je prikazan na slici 3.5.



Slika 3.4: Diferencijalna brzina jonizacije w_{fi} za atom Xe kao funkcija kinetičke energije jonizovanih elektrona E_f . Intenzitet laserskog polja je $I = 5 \cdot 10^{14} \text{ Wcm}^{-2}$, a talasna dužina $\lambda = 800 \text{ nm}$. Ugao između konačnog impulsa elektrona \mathbf{k}_f i vektora polarizacije laserskog polja $\hat{\mathbf{e}}$ iznosi $\theta = 0^\circ$.



Slika 3.5: Diferencijalne brzine jonizacije w_{fi} za atome He, Ne, Ar, Kr i Xe kao funkcije kinetičke energije jonizovanih elektrona E_f . Intenzitet laserskog polja za sve atome je $I = 5 \cdot 10^{14} \text{ Wcm}^{-2}$. Ugao između konačnog impulsa elektrona \mathbf{k}_f i vektora polarizacije laserskog polja $\hat{\mathbf{e}}$ je $\theta = 0^\circ$.

Poglavlje 4

Odvajanje iznad praga

Proces odvajanja elektrona od negativnih jona iznad praga, odnosno ATD (Above Threshold Detachment) je proces analogan ATI procesu, s tim da su u ATD procesu mete negativni joni, a ne atomi kao što je slučaj u ATI procesu. Dakle, ovdje posmatramo odvajanje slabo vezanog elektrona od negativnog jona unutar laserskog polja. U oba slučaja elektron apsorbira više fotona nego što mu je potrebno za oslobađanje u kontinuum pomoću jonizacije, odnosno odvajanja. Postoje dvije ključne razlike između ova dva procesa. Energija potrebna za odvajanje elektrona od negativnog jona naziva se elektronski afinitet atoma. Jonizacioni potencijal atoma je općenito nekoliko puta veći od elektronskog afiniteta. To je prva razlika između ATI i ATD procesa. Elektron koji sa atomom obrazuje negativni jon je slabo vezan, tj. lako se odvajanje od matičnog jona u umjereno jakim laserskim poljima. Druga razlika je u tome što prilikom jonizacije elektron iza sebe ostavlja pozitivan jon sa kojim međudjeluje Coulombovom silom, što nije slučaj kod odvajanja od negativnih jona. Dugi niz godina je bio veliki izazov bilo izvođenje eksperimenta sa negativnim jonima u laserskom polju koje je dovoljno jako da bi se opazili neperturbativni efekti koji su karakteristični za ATI proces. U prvim takvim eksperimentima mjerena je samo vjerovatnoća odvajanja [30]. Najveći elektronski afinitet imaju atomi halogenih elemenata (F, Cl, Br, I), pa su njihovi joni najpogodniji za ispitivanje efekata jakog laserskog polja. U novijim eksperimentima uspješno je snimljen energetska spektar sa ugaonom raspodjelom za jon H^- [31] i jon F^- [32].

4.1 Teorija

Naši teorijski proračuni će i dalje biti razmatrani primjenom aproksimacije jakog polja [33] (SFA). Posmatrajmo negativni jon u osnovnom stanju $|\psi_i\rangle$

koji se nalazi u laserskom pulsu sa vektorskim potencijalom $\mathbf{A}(t)$ i električnim poljem $\mathbf{E}(t) = -\partial\mathbf{A}(t)/\partial t$. Amplituda vjerovatnoće za detekciju ATD elektrona (tj. elektrona koji je odvojen od matičnog jona apsorpcijom većeg broja laserskih fotona nego što mu je potrebno za prelazak u kontinuum) sa impulsom \mathbf{k}_f i kinetičkom energijom $E_f = k_f^2/2$ je [18]

$$M_{fi} = -i \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^t \langle \psi_{\mathbf{k}_f}(t) | U(t, t') \mathbf{r} \cdot \mathbf{E}(t') | \psi_i(t') \rangle dt'. \quad (4.1)$$

U posljednjoj jednačini, $U(t, t')$ je evolucionni operator hamiltonijana

$$H(t) = -\frac{\nabla^2}{2} + \mathbf{r} \cdot \mathbf{E}(t) + V(\mathbf{r}), \quad (4.2)$$

gdje je $\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}(t)$ interakcija elektrona sa laserskim poljem u $\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}$ geidžu i dipolnoj aproksimaciji, a $V(\mathbf{r})$ je interakcija elektrona sa ostatkom negativnog jona u odsustvu laserskog polja. Stanje $\psi_{\mathbf{k}_f}$ odgovara elektronu sa asimptotskim impulsom \mathbf{k}_f , a ψ_i je osnovno stanje negativnog jona. Oba ova stanja su rješenja Schrödingerove jednačine sa hamiltonijanom $H_i = -\nabla^2/2 + V(\mathbf{r})$, koji odgovara negativnom jonu. Evolucionni operator $U(t, t')$ zadovoljava Dysonovu jednačinu

$$U(t, t') = U_L(t, t') - i \int_{t'}^t U_L(t, t'') V U(t'', t') dt'', \quad (4.3)$$

gdje je $U_L(t, t')$ Volkovljev evolucionni operator, tj. evolucionni operator hamiltonijana $H_L(t) = -\nabla^2/2 + \mathbf{r} \cdot \mathbf{E}(t)$, koji odgovara slobodnom elektronu u laserskom polju. Vlastiti vektori vremenski-zavisne Schrödingerove jednačine sa hamiltonijanom $H_L(t)$ su Volkovljevi vektori stanja (2.4). Ovaj put ćemo ih napisati u obliku

$$|\chi_{\mathbf{k}_f}(t)\rangle = |\mathbf{k}_f + \mathbf{A}(t)\rangle \exp[-iS_{\mathbf{k}_f}(t)], \quad (4.4)$$

gdje je $|\mathbf{k}_f + \mathbf{A}(t)\rangle$ ravni talas koji odgovara slobodnom elektronu sa impulsom $\mathbf{k}_f + \mathbf{A}(t)$, i

$$S_{\mathbf{k}_f}(t) = \frac{1}{2} \int^t [\mathbf{k}_f + \mathbf{A}(t')]^2 dt'. \quad (4.5)$$

Volkovljev evolucionni operator se može predstaviti u obliku

$$U_L(t, t') = \int |\chi_{\mathbf{k}}(t)\rangle \langle \chi_{\mathbf{k}}(t')| d\mathbf{k}. \quad (4.6)$$

Jednačine (3.17) i (4.3) su egzaktne. Primijenit ćemo sada aproksimaciju jakog polja, zamjenjujući $\langle \psi_{\mathbf{k}_f}(t) | U(t, t')$ sa $\langle \chi_{\mathbf{k}_f}(t) | U(t, t')$ u jednačini (3.17) i

U sa U_L na desnoj strani jednačine (4.3). Kombinovanjem tako modifikovanih jednačina (3.17) i (4.3), dobijamo

$$M_{fi}^{SFA} = M_{fi}^{(0)} + M_{fi}^{(1)}, \quad (4.7)$$

gdje je

$$M_{fi}^{(0)} = -i \int_{-\infty}^{\infty} dt \langle \chi_{\mathbf{k}_f}(t) | \mathbf{r} \cdot \mathbf{E}(t) | \psi_i(t) \rangle, \quad (4.8)$$

$$M_{fi}^{(1)} = - \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_t^{\infty} dt' \langle \chi_{\mathbf{k}_f}(t') | V U_L(t', t) \mathbf{r} \cdot \mathbf{E}(t) | \psi_i(t) \rangle. \quad (4.9)$$

Amplituda $M_{fi}^{(0)}$ opisuje direktno odvajanje elektrona [34], dok $M_{fi}^{(1)}$ odgovara elektronima koji se nakon odvajanja rasiju na matičnom atomu, i koji su odgovorni za plato u visokoenergetskom dijelu ATD spektra. Prema tome, amplituda $M_{fi}^{(1)}$ opisuje rescattering i predstavlja generalizaciju three-step modela za HATI na proces koga zovemo odvajanje iznad praga višeg reda ili, skraćeno, HATD (high-order above-threshold detachment). U prvom koraku, elektron se odvajava od negativnog jona. U drugom koraku, oslobođeni elektron se kreće u laserskom polju, koje ga vraća nazad do matičnog atoma. U trećem koraku, elektron se elastično rasijava na atomu. Zahvaljujući dodatnom ubrzanju koje elektron nakon ovog rasijanja dobija u laserskom polju, on može steći mnogo veću energiju nego u direktnom ATD procesu.

Koristeći relaciju (2.7) i pišući t umjesto t' , jednačinu (4.9) možemo napisati u obliku

$$M_{fi}^{(1)} = - \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_0^{\infty} d\tau \langle \chi_{\mathbf{k}_f}(t) | V U_L(t, t - \tau) \mathbf{r} \cdot \mathbf{E}(t - \tau) | \psi_i(t - \tau) \rangle, \quad (4.10)$$

gdje je τ vrijeme povratka, po analogiji sa ATI procesom. Uvrštavanjem jednačine (4.6) u jednačinu (4.10), korištenjem relacije (4.4), te integracijom po elektronskim impulsima \mathbf{k} [vidjeti relaciju (3.13)], dobijamo

$$M_{fi}^{(1)} = - \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_0^{\infty} d\tau \left(\frac{2\pi}{i\tau} \right)^{3/2} \exp \{ i [S_{\mathbf{k}}(t') - S_{\mathbf{k}}(t)] \} \exp \left(- \frac{i}{2\tau} \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{k}^2} \right) \\ \times \langle \chi_{\mathbf{k}_f}(t) | V | \mathbf{k} + \mathbf{A}(t) \rangle \langle \mathbf{k} + \mathbf{A}(t') | \mathbf{r} \cdot \mathbf{E}(t') | \psi_i(t') \rangle \Big|_{\mathbf{k}=\mathbf{k}_s}, \quad (4.11)$$

gdje je $t' = t - \tau$, a

$$\mathbf{k}_s = - \frac{1}{\tau} \int_{t-\tau}^t \mathbf{A}(t') dt' = \frac{1}{\tau} [\boldsymbol{\alpha}(t - \tau) - \boldsymbol{\alpha}(t)]. \quad (4.12)$$

Uzimajući u obzir da je $\psi_i(t) = \psi_i \exp(iE_a t)$, gdje je E_a elektronski afinitet, i da su Volkovljevi vektori stanja definisani relacijama (4.4) i (4.5), uvrštavanjem jednačina (4.8) i (4.11) u jednačinu (4.7), dobijamo

$$M_{fi} = -i \int_{-\infty}^{\infty} \exp [i(E_f + E_a + U_P)t] \mathcal{T}_{fi}(\varphi) dt, \quad (4.13)$$

gdje je U_P ponderomotorna energija elektrona, a veličina $\mathcal{T}_{fi}(\varphi)$ je data relacijama

$$\mathcal{T}_{fi}(\varphi) = \left[\mathcal{T}_{fi}^{(0)}(\varphi) + \mathcal{T}_{fi}^{(1)}(\varphi) \right] \exp \{ i[\mathbf{k}_f \cdot \boldsymbol{\alpha}(\varphi) + \mathcal{U}_1(\varphi)] \}, \quad (4.14)$$

$$\mathcal{T}_{fi}^{(0)}(\varphi) = i\mathbf{E}(\varphi) \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \tilde{\psi}_i(\mathbf{q}), \quad (4.15)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{fi}^{(1)}(\varphi) = & -i \int_0^{\infty} d\tau \left(\frac{2\pi}{i\tau} \right)^{3/2} \exp \{ i[S_{\mathbf{k}}(\varphi') - S_{\mathbf{k}}(\varphi) - E_a\tau] \} \\ & \times \exp \left(-\frac{i}{2\tau} \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{k}^2} \right) V_{\mathbf{k}-\mathbf{k}_f} \langle \mathbf{k} + \mathbf{A}(\varphi') | \mathbf{r} \cdot \mathbf{E}(\varphi') | \psi_i \rangle \Big|_{\mathbf{k}=\mathbf{k}_s}, \end{aligned} \quad (4.16)$$

u kojima je

$$\varphi = \omega t, \quad \varphi' = \omega(t - \tau), \quad \mathbf{q} = \mathbf{k}_f + \mathbf{A}(\varphi), \quad (4.17)$$

$$\tilde{\psi}_i(\mathbf{q}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \psi_i(\mathbf{r}) \exp(-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}) d\mathbf{r}, \quad (4.18)$$

$$V_{\mathbf{k}-\mathbf{k}_f} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int V(\mathbf{r}) \exp[i(\mathbf{k} - \mathbf{k}_f) \cdot \mathbf{r}] d\mathbf{r}, \quad (4.19)$$

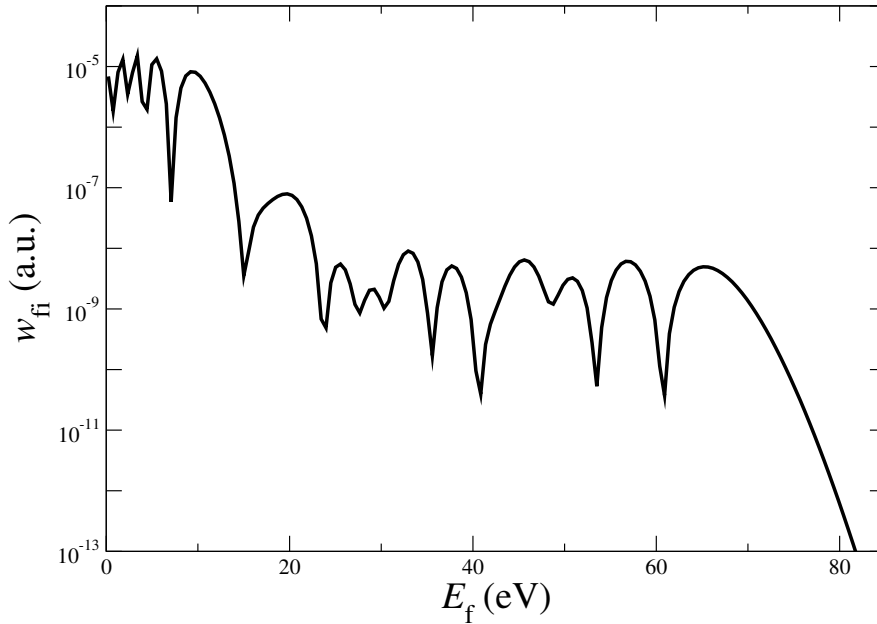
dok su $\boldsymbol{\alpha}(\varphi) \equiv \boldsymbol{\alpha}(t)$ i $\mathcal{U}_1(\varphi) \equiv \mathcal{U}_1(t)$ definisani jednačinama (2.5). Član $\mathcal{T}_{fi}^{(0)}$ odgovara direktnom ATD procesu, u kome odvojeni elektron bez rasijanja napušta lasersko polje i odlazi u asimptotsko područje, dok član $\mathcal{T}_{fi}^{(1)}$ odgovara HATD procesu, u kome se odvojeni elektron rasijava na matičnom atomu i zatim napušta lasersko polje, odlazeći u asimptotsko područje. S obzirom na periodičnost laserskog polja, čiji je period $T = 2\pi/\omega$, vrijede relacije (2.18) i (2.19). Kada relaciju (2.18) uvrstimo u jednačinu (4.13), imamo

$$M_{fi} = -2\pi i \sum_n \delta(E_f + E_a + U_P - n\omega) T_{fi}(n), \quad (4.20)$$

gdje je $T_{fi}(n)$ matrični element za proces odvajanja elektrona od negativnog jona u kome odvojeni elektron apsorbira n fotona iz laserskog polja, a delta-funkcija izražava zakon očuvanja energije $E_f = n\omega - E_a - U_P$. Analogno ATI procesu, matrični element $T_{fi}(n)$ je dat relacijom (2.19), a diferencijalna brzina odvajanja relacijom (3.17). Integral po vremenu τ u relaciji (4.16) se može izračunati numeričkom integracijom, a integral po φ , odnosno vremenu t , u relaciji (2.19) se računa metodom brze Fourierove transformacije.

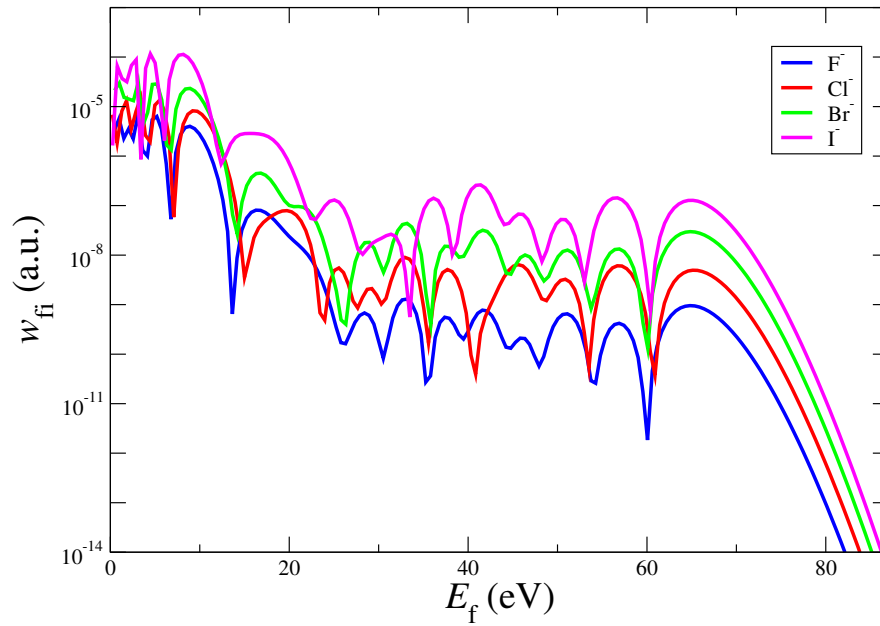
4.2 Numerički rezultati

Nakon teorijskih proračuna, predstavimo neke numeričke rezultate. Kao potencijal rasijanja uzimamo kombinaciju polarizacionog i statičkog potencijala, što je analogno situaciji koju smo imali kod elektron-atomskog rasijanja (vidjeti odjeljak 2). Tada je $V = V_P + V_S$, gdje su polarizacioni potencijal V_P i statički potencijal V_S dati relacijama (2.24) i (2.26), respektivno. Posmatramo proces odvajanja elektrona od negativnih jona u monohromatskom linearno polarizovanom laserskom polju sa vektorskim potencijalom (2.28). Na slici 4.1 je prikazana diferencijalna brzina odvajanja elektrona od jona Cl^- u zavisnosti od konačne energije elektrona. Rezultati su dobijeni za lasersko polje intenziteta $1.3 \cdot 10^{13} \text{ Wcm}^{-2}$ i talasne dužine $\lambda = 2350 \text{ nm}$. Ugao između konačnog impulsa odvojenih elektrona \mathbf{k}_f i vektora polarizacije laserskog polja $\hat{\mathbf{e}}$ je $\theta = 0^\circ$. Takođe, možemo prikazati diferencijalne brzine



Slika 4.1: Diferencijalne brzine odvajanja w_{fi} elektrona od jona Cl^- kao funkcija konačne energije odvojenih elektrona E_f . Intenzitet laserskog polja je $I = 1.3 \cdot 10^{13} \text{ Wcm}^{-2}$ a talasna dužina $\lambda = 2350 \text{ nm}$. Ugao između konačnog impulsa odvojenih elektrona \mathbf{k}_f i vektora polarizacije laserskog polja $\hat{\mathbf{e}}$ je $\theta = 0^\circ$.

odvajanja elektrona od različitih jona (Br^- , F^- , Cl^- i I^-) u istom laserskom polju kao na prethodnoj slici, tj. polju intenziteta $I = 1.3 \cdot 10^{13} \text{ Wcm}^{-2}$ i talasne dužine $\lambda = 2350 \text{ nm}$. Ugao između konačnog impulsa odvojenih elektrona \mathbf{k}_f i vektora polarizacije laserskog polja $\hat{\mathbf{e}}$ iznosi $\theta = 0^\circ$. Rezultati su predstavljeni na slici 4.2.

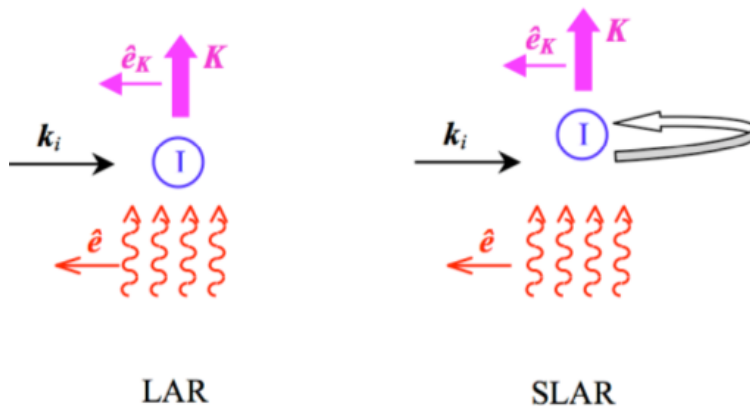


Slika 4.2: Diferencijalne brzine odvajanja w_{fi} elektrona od jona Br^- , Cl^- , F^- i I^- kao funkcije konačnih energija odvojenih elektrona E_f . Intenzitet laserskog polja je $I = 1.3 \cdot 10^{13} \text{ Wcm}^{-2}$ a talasna dužina $\lambda = 2350 \text{ nm}$. Ugao između konačnog impulsa odvojenih elektrona \mathbf{k}_f i vektora polarizacije laserskog polja $\hat{\mathbf{e}}$ iznosi $\theta = 0^\circ$.

Poglavlje 5

Elektron-jonska rekombinacija

Elektron-jonska rekombinacija u laserskom polju, odnosno LAR (laser-assisted recombination) je proces koji tek posljednjih godina privlači veću pažnju teoretičara. Eksperimentalnih rezultata još uvijek ima malo i uglavnom se odnose na elektron-jonsku rekombinaciju u slabom laserskom polju, koje omogućava samo jednofotonske procese. Za postizanje višefotonskog LAR procesa neophodno je jako lasersko polje. U direktnom LAR procesu, slo-



Slika 5.1: Shematski prikaz LAR (lijeva slika) i SLAR (desna slika) procesa.

bodni elektron sa impulsom p_i i energijom E_i dolazi iz asimptotskog područja i rekombinuje se sa pozitivnim jonom u laserskom polju, pri čemu nastaje vezano atomsko stanje sa energijom $E_B < 0$. Prije same rekombinacije, elektron razmijeni n fotona sa laserskim poljem koje ima nisku frekvenciju ω i visok intenzitet I . Konačni rezultat procesa je emisija visokoenergetskog fotona sa frekvencijom ω_K . Međutim, može se desiti da se dolazeći elektron prvo rasije na jonskom potencijalu, nakon čega se kreće u laserskom polju koje ga vraća nazad do jona sa kojim se konačno rekombinuje. U razmatranjima koja slijede, ovaj proces ćemo skraćeno zvati SLAR, pri čemu “S”

označava “scattering”. Shematski prikaz ova dva procesa slijedi na slici 5.1. Analogno procesima HATI, HATD i elektron-atomskog rasijanja sa rescatteringom, SLAR spada u procese koji se mogu opisati three-step modelom. Fotoni koji se emituju u LAR i SLAR procesu mogu imati tako visoke energije da se njihove frekvencije mogu nalaziti čak u spektralnom području mekih x-zraka.

5.1 Teorija

Prilikom naših teorijskih proračuna koristit ćemo se kao i ranije, aproksimacijom jakog laserskog polja i S -matričnim formalizmom [37, 38]. Polazimo od opšteg izraza za S -matriču

$$S_{fi} = i \lim_{\substack{t' \rightarrow +\infty \\ t \rightarrow -\infty}} \langle \Phi_{\text{out}}(t') | G^{(+)}(t', t) | \Phi_{\text{in}}(t) \rangle, \quad (5.1)$$

gdje su Φ_{in} i Φ_{out} ulazno i izlazno stanje, respektivno, a $G^{(+)}$ je totalni retardirani Greenov operator koji odgovara totalnom hamiltonijanu

$$H = H_0 + \mathbf{r} \cdot \mathbf{E}_X(\mathbf{r}, t), \quad H_0 = \frac{\mathbf{p}^2}{2} + V_A + \mathbf{r} \cdot \mathbf{E}_L(t), \quad (5.2)$$

gdje $\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}_X(\mathbf{r}, t)$ opisuje interakciju atoma sa poljem x-zraka u $\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}$ geidžu, $\mathbf{p}^2/2$ je operator kinetičke energije, V_A je atomski potencijal, a $\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}_L(t)$ predstavlja interakciju atoma sa laserskim poljem u $\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}$ gaugeu. Polje x-zraka ćemo smatrati kvantiziranim, što znači da je

$$\mathbf{E}_X(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_X^{(+)}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{E}_X^{(-)}(\mathbf{r}, t), \quad (5.3)$$

$$\mathbf{E}_X^{(+)}(\mathbf{r}, t) = iC_{\mathbf{K}} \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{K}} a_{\mathbf{K}} \exp[-i(\omega_{\mathbf{K}}t - \mathbf{K} \cdot \mathbf{r})], \quad (5.4)$$

$$\mathbf{E}_X^{(-)}(\mathbf{r}, t) = -iC_{\mathbf{K}} \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{K}} a_{\mathbf{K}}^{\dagger} \exp[i(\omega_{\mathbf{K}}t - \mathbf{K} \cdot \mathbf{r})], \quad (5.5)$$

gdje su $a_{\mathbf{K}}$ i $a_{\mathbf{K}}^{\dagger}$ operatori uništavanja i stvaranja fotona polja x-zraka, respektivno, $\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{K}}$ je jedinični vektor polarizacije, a \mathbf{K} talasni vektor fotona x-zraka, dok je $C_{\mathbf{K}}^2 = 2\pi\omega_{\mathbf{K}}/\mathcal{V}$, pri čemu \mathcal{V} predstavlja volumen kvantizacije. Ulazno stanje u jednačini (5.1) je početno stanje slobodnog elektrona u odsustvu laserskog polja, pomnoženo sa vakuumskim stanjem $|0_{\mathbf{K}}\rangle$ polja x-zraka. Ukoliko je V_A samo potencijal kratkog dometa, početno stanje elektrona je opisano ravnim talasom sa impulsom \mathbf{p}_i . Izlazno stanje u jednačini (5.1) je vezano elektronsko stanje u odsustvu laserskog polja, pomnoženo sa jednofotonskim stanjem $|1_{\mathbf{K}}\rangle$ polja x-zraka. Greenov operator $G^{(+)}$ zadovoljava Lippmann-Schwingerovu jednačinu

$$G^{(+)}(t', t) = G_0^{(+)}(t', t) + \int_{-\infty}^{\infty} G^{(+)}(t', t'') V G_0^{(+)}(t'', t) dt'', \quad (5.6)$$

gdje Greenov operator $G_0^{(+)}$ odgovara hamiltonijanu H_0 , koji je dat drugom od jednačina (5.2). Uvrštavajući Lippmann-Schwingerovu jednačinu (5.6) u izraz za S -matricu (5.1), stavljajući $V = \mathbf{r} \cdot \mathbf{E}_X(\mathbf{r}, t)$ i koristeći relacije

$$\langle \Phi_f^{(-)}(t) | = i \langle \Phi_{\text{out}}(\infty) | G^{(+)}(\infty, t), \quad (5.7)$$

$$i G_0^{(+)}(t, -\infty) | \Phi_{\text{in}}(-\infty) \rangle = | \Psi_{\mathbf{p}_i}^{(+)}(t) \rangle | 0_{\mathbf{K}} \rangle, \quad (5.8)$$

dobijamo

$$S_{fi} = -i \int_{-\infty}^{\infty} \langle \Phi_f^{(-)}(t) | \mathbf{r} \cdot \mathbf{E}_X^{(-)}(\mathbf{r}, t) | \Psi_{\mathbf{p}_i}^{(+)}(t) \rangle | 0_{\mathbf{K}} \rangle dt, \quad (5.9)$$

pri čemu je $| \Psi_{\mathbf{p}_i}^{(+)}(t) \rangle$ rješenje Schrödingerove jednačine sa hamiltonijanom H_0 . Pretpostavimo da se atomski potencijal V_A sastoji od Coulombovog potencijala V_C , koji je dugog dometa, i potencijala kratkog dometa V_S . Prema tome, $V_A = V_C + V_S$. Da bi istražili rasijanje elektrona na potencijalu V_S , hamiltonijan H_0 ćemo razdvojiti na sljedeći način: $H_0 = (H_0 - V_S) + V_S$. Ovo vodi na Lippmann-Schwingerovu jednačinu

$$| \Psi_{\mathbf{p}_i}^{(+)}(t) \rangle = | \psi_{\mathbf{p}_i, C}^{(+)}(t) \rangle + \int_{-\infty}^{\infty} G_0^{(+)}(t, t') V_S | \psi_{\mathbf{p}_i, C}^{(+)}(t') \rangle dt', \quad (5.10)$$

gdje stanje $| \psi_{\mathbf{p}_i, C}^{(+)}(t) \rangle$ nastaje evolucijom ulaznog stanja elektrona pod uticajem Greenovog operatora $G_C^{(+)}$, koji odgovara hamiltonijanu $H_0 - V_S$. To znači da je

$$| \psi_{\mathbf{p}_i, C}^{(+)}(t) \rangle = i G_C^{(+)}(t, -\infty) | \psi_{\text{in}}(-\infty) \rangle, \quad (5.11)$$

pri čemu $| \psi_{\text{in}}(t) \rangle$ označava ulazno stanje elektrona, uz $| \Phi_{\text{in}}(t) \rangle = | \psi_{\text{in}}(t) \rangle | 0_{\mathbf{K}} \rangle$. S obzirom da koristimo aproksimaciju jakog polja, stanje $| \psi_{\mathbf{p}_i, C}^{(+)}(t) \rangle$ možemo aproksimirati Volkovljevim vektorom stanja:

$$| \psi_{\mathbf{p}_i, C}^{(+)}(t) \rangle \approx | \chi_{\mathbf{p}_i}(t) \rangle = | \mathbf{p}_i + \mathbf{A}(t) \rangle \exp \{ -i [E_i t + \mathbf{p}_i \cdot \boldsymbol{\alpha}(t) + \mathcal{U}(t)] \}, \quad (5.12)$$

gdje je $E_i = p_i^2/2$, a veličine $\boldsymbol{\alpha}(t)$ i $\mathcal{U}(t)$ su date jednačinama (2.5). Sljedeća aproksimacija koju ćemo primijeniti je zamjena Greenovog operatora $G_0^{(+)}$ u jednačini (5.10) Volkovljevim Greenovim operatorom

$$G_L^{(+)}(t, t') = -i \Theta(t - t') \int | \chi_{\mathbf{q}}(t) \rangle \langle \chi_{\mathbf{q}}(t') | d\mathbf{q}. \quad (5.13)$$

Naposlijetku, zanemarit ćemo uticaj polja na konačno stanje $| \Phi_f^{(-)}(t) \rangle$ u jednačini (5.9). Ovo stanje ćemo opisati pomoću osnovnog stanja atoma, pomnoženog sa jednofotonskim stanjem, tj.

$$| \Phi_f^{(-)}(t) \rangle \approx | \psi_B \rangle \exp(-i E_B t) | 1_{\mathbf{K}} \rangle. \quad (5.14)$$

Kada jednačinu (5.10) uvrstimo u jednačinu (5.9) i primijenimo sve gore navedene aproksimacije, dobijamo sljedeći oblik S -matričnog elementa:

$$S_{fi} = -C_{\mathbf{K}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\mathcal{S}_{fi}^{(0)} + \mathcal{S}_{fi}^{(1)} \right) \exp [i(E_B + \omega_{\mathbf{K}})t] dt, \quad (5.15)$$

gdje je

$$\mathcal{S}_{fi}^{(0)} = \exp \left\{ -i [E_i t + \mathbf{p}_i \cdot \boldsymbol{\alpha}(t) + \mathcal{U}(t)] \right\} \langle \psi_B | \mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{K}} e^{-i\mathbf{K} \cdot \mathbf{r}} | \mathbf{p}_i + \mathbf{A}(t) \rangle, \quad (5.16)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{fi}^{(1)} &= -i \int_{-\infty}^t dt' \int d\mathbf{q} \exp \left\{ -i [E_i t' + \mathbf{p}_i \cdot \boldsymbol{\alpha}(t') + \mathcal{U}(t')] \right\} \\ &\quad \times \langle \psi_B | \mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{K}} e^{-i\mathbf{K} \cdot \mathbf{r}} | \mathbf{q} + \mathbf{A}(t) \rangle \langle \mathbf{q} + \mathbf{A}(t') | V_S | \mathbf{p}_i + \mathbf{A}(t') \rangle \\ &\quad \times \exp \left\{ -\frac{i}{2} \int_{t'}^t [\mathbf{q} + \mathbf{A}(t'')]^2 dt'' \right\}. \end{aligned} \quad (5.17)$$

Dvostruki integral po vremenima t i t' u jednačini (5.15) se može preurediti primjenom opšte relacije

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^t dt' f(t, t') = \int_{-\infty}^{\infty} dt' \int_{t'}^{\infty} dt f(t, t') = \int_{-\infty}^{\infty} dt' \int_0^{\infty} d\tau f(t' + \tau, t'), \quad (5.18)$$

tako da, stavljajući t umjesto t' , imamo

$$\begin{aligned} S_{fi} &= -C_{\mathbf{K}} \int_{-\infty}^{\infty} dt \exp \left\{ i [(E_B + \omega_{\mathbf{K}} - E_i - U_P)t - \mathbf{p}_i \cdot \boldsymbol{\alpha}(t) - \mathcal{U}_1(t)] \right\} \\ &\quad \times \left\{ \langle \psi_B | \mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{K}} e^{-i\mathbf{K} \cdot \mathbf{r}} | \mathbf{p}_i + \mathbf{A}(t) \rangle - i \int_0^{\infty} d\tau \int d\mathbf{q} \exp [-iS(\mathbf{q}; t, \tau)] \right. \\ &\quad \left. \times \langle \psi_B | \mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{K}} e^{-i\mathbf{K} \cdot \mathbf{r}} | \mathbf{q} + \mathbf{A}(t + \tau) \rangle \langle \mathbf{q} + \mathbf{A}(t) | V_S | \mathbf{p}_i + \mathbf{A}(t) \rangle \right\}, \end{aligned} \quad (5.19)$$

gdje je U_P ponderomotorna energija elektrona u laserskom polju, $\mathcal{U}_1(t)$ je vremenski periodičan dio funkcije $\mathcal{U}(t)$, dok je

$$S(\mathbf{q}; t, \tau) = \int_t^{t+\tau} \left\{ \frac{[\mathbf{q} + \mathbf{A}(t')]^2}{2} - E_B - \omega_{\mathbf{K}} \right\} dt' \quad (5.20)$$

semiklasična akcija. S -matrični element (5.19) ima jednostavnu fizikalnu interpretaciju. U početnom trenutku t , elektron se može direktno rekombinovati u osnovno stanje, emitujući foton x-zraka. Ovaj proces je opisan prvim članom u vitičastoj zagradi na desnoj strani jednačine (5.19). Takođe,

elektron se može najprije rasijati na potencijalu V_S , te se nakon toga kretati u laserskom polju od trenutka t do trenutka $t + \tau$, u kome se vraća nazad do jonske mete i rekombinuje uz emisiju fotona x-zraka. Ovom procesu odgovara drugi član u vitičastoj zagradi na desnoj strani jednačine (5.19). Integral po elektronskim impulsima \mathbf{q} se može riješiti korištenjem metode sedlaste tačke [vidjeti relaciju (3.13)]. Tada se jednačina (5.19) može napisati u obliku

$$S_{fi} = -C_{\mathbf{K}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp [i(E_B + \omega_{\mathbf{K}} - E_i - U_P)t] \mathcal{T}_{fi}(\varphi) dt, \quad (5.21)$$

gdje je $\varphi = \omega t$, a veličina $\mathcal{T}_{fi}(\varphi)$ je data relacijom

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{fi}(\varphi) = \exp \{ -i[\mathbf{p}_i \cdot \boldsymbol{\alpha}(\varphi) + \mathcal{U}_1(\varphi)] \} & \left\{ \langle \psi_B | \mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{K}} e^{-i\mathbf{K} \cdot \mathbf{r}} | \mathbf{p}_i + \mathbf{A}(\varphi) \rangle \right. \\ & -i \int_0^{\infty} d\tau \left(\frac{2\pi}{i\tau} \right)^{3/2} \langle \psi_B | \mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{K}} e^{-i\mathbf{K} \cdot \mathbf{r}} | \mathbf{k}_s + \mathbf{A}(\varphi + \omega\tau) \rangle \\ & \left. \times \langle \mathbf{k}_s + \mathbf{A}(\varphi) | V_S | \mathbf{p}_i + \mathbf{A}(\varphi) \rangle \exp [-iS(\mathbf{k}_s; \varphi, \omega\tau)] \right\}, \quad (5.22) \end{aligned}$$

u kojoj je stacionarni impuls $\mathbf{k}_s(t, \tau) = -(1/\tau) \int_t^{t+\tau} \mathbf{A}(t') dt'$ rješenje jednačine $\nabla_{\mathbf{q}} S(\mathbf{q}; t, \tau) = \mathbf{0}$. Funkcija $\mathcal{T}_{fi}(\varphi)$ je vremenski periodična sa periodom $T = 2\pi/\omega$, što znači da je matični element $T_{fi}(n)$ dat relacijom (2.19), pri čemu je n broj fotona razmijenjenih sa laserskim poljem. Analogno ostalim procesima koje smo razmatrali, matični elementi u relaciji (5.22) imaju jednostavan analitički oblik, pa se T -matični element $T_{fi}(n)$ može lako izračunati numeričkom integracijom po vremenu povratka τ i primjenom metode brze Fourierove transformacije u rješavanju integrala po vremenu t . Vremenska periodičnost funkcije $\mathcal{T}_{fi}(\varphi)$ takođe podrazumijeva da vrijedi relacija (2.18), čijim uvrštavanjem u jednačinu (5.21) dobijamo

$$S_{fi} = -2\pi C_{\mathbf{K}} \sum_n \delta(E_B + \omega_{\mathbf{K}} - E_i - U_P - n\omega) T_{fi}(n). \quad (5.23)$$

Delta-funkcija u gornjoj jednačini izražava zakon očuvanja energije, koji glasi $\omega_{\mathbf{K}} = E_i + U_P + n\omega - E_B$.

Gustoća stanja emitovanih x-zraka iznosi $\mathcal{V} \omega_{\mathbf{K}}^2 d\omega_{\mathbf{K}} d\Omega_{\hat{\mathbf{K}}} / (2\pi c)^3$, pri čemu je \mathcal{V} volumen kvantizacije ovih stanja. S druge strane, gustoća elektronskih stanja, normiranih na ravni talas $(2\pi)^{-3/2} \exp(i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r})$, iznosi $p_i dE_i d\Omega_{\hat{\mathbf{p}}_i}$. U skladu s tim, diferencijalna brzina emisije fotona x-zraka sa frekvencijom u intervalu $(\omega_{\mathbf{K}} - d\omega_{\mathbf{K}}, \omega_{\mathbf{K}} + d\omega_{\mathbf{K}})$ i polarizacijom $\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{K}}$, unutar prostornog ugla $d\Omega_{\hat{\mathbf{K}}}$, za vrijeme rekombinacije elektrona sa početnom energijom E_i i

upadnim smjerom kretanja unutar prostornog ugla $d\Omega_{\hat{\mathbf{p}}_i}$, je data sa

$$\begin{aligned} dw(\mathbf{K}, \mathbf{p}_i) &= \frac{d\Omega_{\hat{\mathbf{K}}}dE_i d\Omega_{\hat{\mathbf{p}}_i}}{T_p} \int_{\omega_{\mathbf{K}}-d\omega_{\mathbf{K}}}^{\omega_{\mathbf{K}}+d\omega_{\mathbf{K}}} d\omega_{\mathbf{K}} \frac{\mathcal{V}\omega_{\mathbf{K}}^2 p_i}{(2\pi c)^3} (-2\pi C_{\mathbf{K}})^2 \\ &\times \sum_n \delta(E_B + \omega_{\mathbf{K}} - E_i - U_P - n\omega) T_{fi}(n) \\ &\times \sum_{n'} \delta(E_B + \omega_{\mathbf{K}} - E_i - U_P - n'\omega) T_{fi}^*(n'), \end{aligned} \quad (5.24)$$

gdje je T_p vrijeme trajanja laserskog pulsa. Produkt delta-funkcija u gornjem izrazu je različit od nule za $n = n'$. Prva delta-funkcija se može eliminisati pomoću relacije $2\pi\delta(0) = T_p$ (za $T_p \rightarrow \infty$), dok druga delta-funkcija nestaje prilikom integracije po $d\omega_{\mathbf{K}}$. Na taj način, dobijamo sljedeći izraz za diferencijalnu brzinu emisije fotona x-zraka:

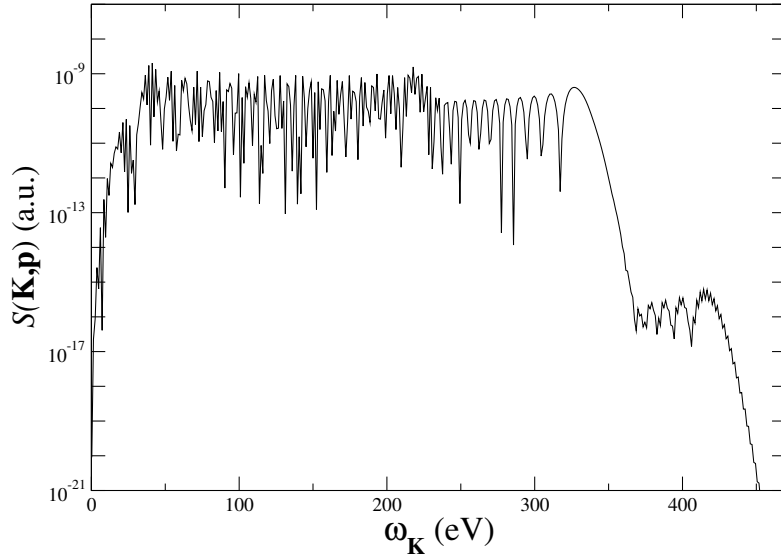
$$dw(\mathbf{K}, \mathbf{p}_i) = \frac{\omega_{\mathbf{K}}^3 p_i}{2\pi c^3} |T_{fi}(n)|^2 d\Omega_{\hat{\mathbf{K}}}dE_i d\Omega_{\hat{\mathbf{p}}_i}, \quad (5.25)$$

pri čemu je $n = (\omega_{\mathbf{K}} - |E_B| - E_i - U_P)/\omega$ broj fotona razmijenjenih sa laserskim poljem. Odgovarajući diferencijalni spektar zračenja je [35, 36]

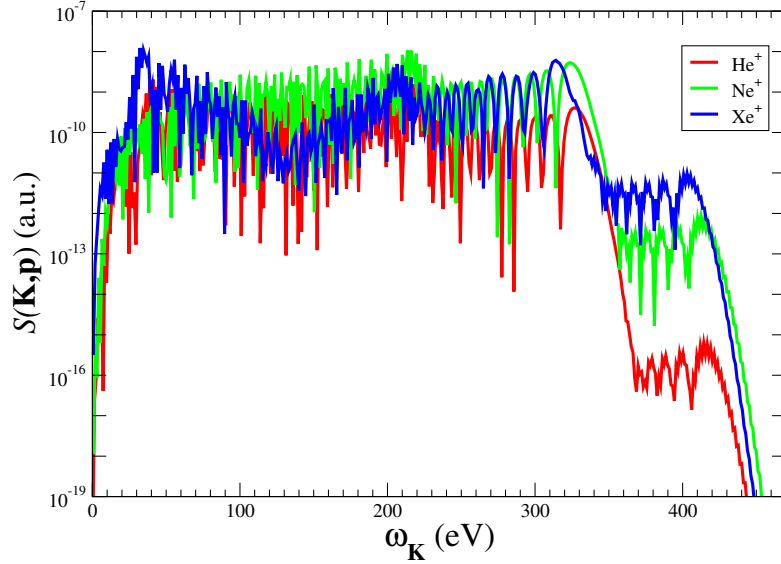
$$S(\mathbf{K}, \mathbf{p}_i) = \frac{\omega_{\mathbf{K}} dw(\mathbf{K}, \mathbf{p}_i)}{d\Omega_{\hat{\mathbf{K}}}dE_i d\Omega_{\hat{\mathbf{p}}_i}} = \frac{\omega_{\mathbf{K}}^4 p_i}{2\pi c^3} |T_{fi}(n)|^2. \quad (5.26)$$

5.2 Numerički rezultati

Sada ćemo prikazati neke od numeričkih rezultata koje smo dobili na osnovu gore predstavljene teorije. Rasijanje elektrona na jonima u SLAR procesu modeliramo dvostrukim Yukawinim potencijalom (2.26). Smatramo da je lasersko polje monohromatsko i linearno polarizovano, sa vektorskim potencijalom (2.28), te da su vektori polarizacije polja x-zraka i laserskog polja istog smjera ($\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{K}} = \hat{\mathbf{e}}$). Predstavit ćemo diferencijalni spektar zračenja $2\pi S(\mathbf{K}, \mathbf{p}_i)$ u zavisnosti od energije emitovanih fotona x-zraka. Na slici 5.2 je predstavljen diferencijalni spektar zračenja za preces rekombinacije elektrona sa jonima He^+ u laserskom polju intenziteta $I = 1.2 \cdot 10^{15} \text{ Wcm}^{-2}$ i talasne dužine $\lambda = 1060 \text{ nm}$. Energija upadnih elektrona je $E_i = 3 \text{ eV}$, a ugao između impulsa upadnih elektrona \mathbf{p}_i i vektora polarizacije laserskog polja $\hat{\mathbf{e}}$ je $\theta = 180^\circ$. Takođe, možemo predstaviti numeričke rezultate procesa rekombinacije za razne jone. Na slici 5.3 dat je diferencijalni spektar zračenja u zavisnosti od energije emitovanih fotona x-zraka za proces rekombinacije elektrona sa jonima He^+ , Ne^+ i Xe^+ u laserskom polju intenziteta



Slika 5.2: Diferencijalni spektar zračenja kao funkcija energije emitovanih x-zraka za slučaj rekombinacije elektrona sa jonima He^+ u laserskom polju intenziteta $I = 1.2 \cdot 10^{15} \text{ Wcm}^{-2}$ i talasne dužine $\lambda = 1060 \text{ nm}$. Energija upadnih elektrona je $E_i = 3 \text{ eV}$, a ugao između impulsa upadnih elektrona \mathbf{p}_i i vektora polarizacije laserskog polja $\hat{\mathbf{e}}$ je $\theta = 180^\circ$.



Slika 5.3: Diferencijalni spektar zračenja kao funkcija energije emitovanih x-zraka za slučaj rekombinacije elektrona sa jonima He^+ , Ne^+ i Xe^+ u laserskom polju intenziteta $I = 1.2 \cdot 10^{15} \text{ Wcm}^{-2}$ i talasne dužine $\lambda = 1060 \text{ nm}$. Energija upadnih elektrona je $E_i = 3 \text{ eV}$, a ugao između impulsa upadnih elektrona \mathbf{p}_i i vektora polarizacije laserskog polja $\hat{\mathbf{e}}$ je $\theta = 180^\circ$.

$I = 1.2 \cdot 10^{15} \text{ Wcm}^{-2}$ i talasne dužine $\lambda = 1060 \text{ nm}$. Energija upadnih elektrona je $E_i = 3 \text{ eV}$, a ugao između impulsa upadnih elektrona \mathbf{p}_i i vektora polarizacije laserskog polja $\hat{\mathbf{e}}$ iznosi $\theta = 180^\circ$.

Poglavlje 6

Generacija viših harmonika

Dugo vremena prilikom istraživanja optičkih pojava smatralo se da su svi optički procesi nelinearni. Razvojem lasera za vrijeme 60-ih godina ispostavilo se da postoje nelinearni efekti nakon interakcije svjetlosti sa materijom. Ovo je uzrokovano činjenicom da je intenzitet laserske zrake veoma velik, a to je upravo potrebno da bi se ispoljili nelinearni efekti. Važno je naglasiti da je nelinearnost čisto svojstvo sredine, a ne same zrake, tako da je za nelinearno ponašanje potrebno sredstvo kao katalizator.

Za male vrijednosti električnog polja atomski dipolni moment se povećava linearno sa zadanim poljem. Kada amplituda električnog polja dostigne vrijednost od oko 10^{11} V/m nelinearnost dolazi do izražaja, jer je tada amplituda električnog polja uporediva sa električnim poljem unutar atoma. Ove intenzitete je danas lako postići, jer amplituda laserskog polja može dostići veoma velike vrijednosti. Širenje svjetlosti u nelinearnoj sredini je opisano nelinearnom talasnom jednačinom, koja potiče od Maxwellovih jednačina i koja predstavlja osnovnu jednačinu nelinearne optike:

$$\nabla^2 E - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} \quad (6.1)$$

gdje je \vec{P} polarizabilnost (dipolni moment po jedinici vremena), \vec{E} električno polje i μ_0 magnetna permeabilnost vakuuma. Ukoliko razmatramo linearnu sredinu, onda je veza između \vec{P} i \vec{E} linearna, sa dielektričnom konstantom ε_0 i susceptibilnošću χ kao faktorima proporcionalnosti

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \chi \vec{E}. \quad (6.2)$$

Za izotropne materijale (materijale koji imaju iste osobine u svim pravcima) susceptibilnost je skalarna veličina, a u slučaju anizotropnih materijala, to je tenzor. Porastom jačine električnog polja pojavljuju se i stepeni višeg reda

po polju, tj zavisnost poprima oblik:

$$P = \varepsilon_0(\chi_1 E + \chi_2 E^2 + \chi_3 E^3 + \dots) \quad (6.3)$$

gdje je radi jednostavnosti pisano \vec{P} i \vec{E} u skalarnom obliku. Prvi koeficijent χ_1 predstavlja linearnu susceptibilnost, dok iza njega slijede nelinearne optičke susceptibilnosti drugog i trećeg reda. Generacija viših harmonika spada u nelinearne efekte N-tog reda.

6.1 Osobine viših harmonika

Navedimo neke opšte činjenice vezane za otkriće generacije viših harmonika. 1961. godine Franken i saradnici su otkrili optičku generaciju harmonika. Primjene su dugo vremena bile ograničene na niže redove harmonika. Tek 26 godina poslije ovog otkrića opažen je nelinearni fenomen generacije viših harmonika (High Harmonic Generation-HHG), u dvije laboratorije, u Chicagu i Saclayu [39, 40]. Suština je bila u razmatranju atoma pod uticajem jakih laserskih polja, što je postalo moguće znatnim napretkom u oblasti laserske tehnologije kratkih pulseva, sa intenzitetima 10^{13} – 10^{15} Wcm⁻² i trajanjem pulseva u pikosekundnom području. U ovom slučaju je lasersko polje veoma jako, tako da ga ne možemo posmatrati kao perturbaciju. Ako usmjerimo ovakav laserski puls u razrijeđeni gas, spektar emitovanog zračenja se sastoji od tri karakteristična dijela:

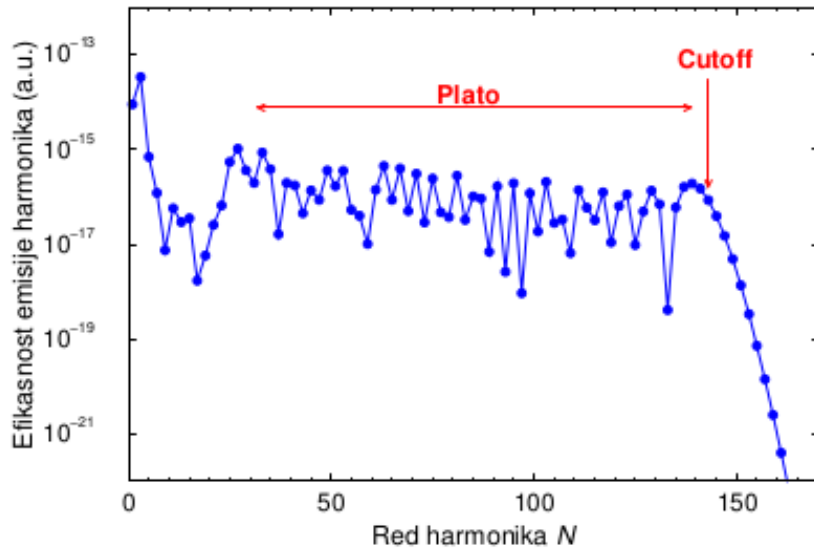
- za niže redove harmonika spektar se karakteriše sa naglim padom
- sa porastom reda harmonika, spektar prelazi u zaravnjeni dio gdje je vjerovatnoća (efikasnost) emisije harmonika približno konstantna
- plato završava sa određenim redom harmonika nakon čega vjerovatnoća emisije harmonika (efikasnost) naglo opada [39, 41].

Zbog određene simetrije interakcije zapaženo je samo emitovanje neparnih harmonika. Ovo osigurava inverziona simetrija, koja je prisutna u slučaju linearno-polarizovanog polja. Kada je ova simetrija narušena, moguće je emitovanje i parnih harmonika. Nakon ovog otkrića, napravljene su brojne studije koje su imale za cilj da objasne fiziku samog procesa. Razvojem eksperimentalne metode postignuti su mnogo duži platoi, koherentno zračenje u tzv. “water window” području talasnih dužina. Uporedo sa ovim razmatranjima, proučavane su prostorne i vremenske karakteristike viših harmonika. Pokazalo se da viši harmonici imaju nekoliko važnih osobina:

- dobra koherencija

- ultrakratko trajanje pulsa (femtosekundno područje)
- visok stepen sjaja.

Ove, ali i druge osobine omogućavaju širok spektar mogućih primjena. Na slici 6.1 možemo vidjeti spektar emisije viših harmonika, odnosno efikasnost emisije harmonika u zavisnosti od reda harmonika za atom He [42, 43].



Slika 6.1: Efikasnost emisije harmonika u zavisnosti reda harmonika za atom He. Označeni su plato i cutoff. Korišteno je lasersko polje intenziteta $I = 10^{15} \text{ Wcm}^{-2}$ i talasne dužine $\lambda = 800 \text{ nm}$.

Prvo ćemo razmotriti mikroskopski aspekt generacije viših harmonika. On je povezan sa nelinearnim odgovorom atoma koji je izložen djelovanju jakog laserskog polja. 1992. godine dat je zakon odsijecanja preko parametara interakcije. U simulaciji jednog atoma koji je izložen djelovanju laserskog polja, rješavanjem vremenski zavisne Schrödingerove jednačine (Time-Dependent Schrödinger Equation–TDSE), pronađen je univerzalni zakon odsijecanja $I_P + 3U_P$, pri čemu je I_P energija jonizacije, a U_P ponderomotorna energija. Objašnjenje ovog univerzalnog zakona odsijecanja su dali Corkum i Kulander [44] 1993. godine primjenom semiklasičnog modela na osnovu kojeg se HHG proces odvija u tri etape. Prvi korak je jonizacija atoma, nakon čega elektron dopijeva u kontinuum. Nakon toga, u drugom koraku, elektron se kreće u laserskom polju i vraća se nazad do matičnog jona. Konačno, u trećem koraku, dolazi do rekombinacije elektrona sa matičnim jonom uz istovremenu emisiju višeg harmonika. Ovaj model se često naziva three-step model (model tri koraka).

6.2 Teorija i numerički rezultati

Za naše teorijske proračune, kao i do sada, koristimo S -matrični formalizam i aproksimaciju jakog polja. Polazimo od S -matrice oblika

$$S_{fi} = i \lim_{\substack{t' \rightarrow +\infty \\ t \rightarrow -\infty}} \langle \Phi_f(t') | G(t', t) | \Phi_i(t) \rangle, \quad (6.4)$$

pri čemu početno i krajnje stanje (Φ_f i Φ_i) zavise od graničnih uslova, a G je totalni retardirani Greenov operator koji zadovoljava Lippmann-Schwingerovu jednačinu

$$G(t', t) = G_x(t', t) + \int_{-\infty}^{\infty} G(t', t'') \mathbf{r} \cdot \mathbf{E}_H G_x(t'', t) dt'', \quad (6.5)$$

Totalni retardirani Greenov operator odgovara totalnom hamiltonijanu

$$H = H_0 + \mathbf{r} \cdot \mathbf{E}_H(t), \quad H_0 = \frac{\mathbf{p}^2}{2} + V_A + \mathbf{r} \cdot \mathbf{E}_L(t), \quad (6.6)$$

gdje $\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}_H(t)$ opisuje interakciju atoma i elektromagnetnog polja višeg harmonika u $\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}$ gaugeu, $\mathbf{p}^2/2$ je operator kinetičke energije, V_A je atomski potencijal, a $\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}_L(t)$ predstavlja interakciju atoma sa laserskim poljem u $\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}$ gaugeu. Za $\mathbf{E}_H(t)$ vrijedi izraz

$$\mathbf{E}_H(t) = \sum_{\mathbf{K}} C_{\mathbf{K}} \left[\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{K}}^* a_{\mathbf{K}}^\dagger \exp [i(\omega_{\mathbf{K}} t - \mathbf{K} \cdot \mathbf{r})] - \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{K}} a_{\mathbf{K}} \exp [-i(\omega_{\mathbf{K}} t - \mathbf{K} \cdot \mathbf{r})] \right], \quad (6.7)$$

gdje su $a_{\mathbf{K}}$ i $a_{\mathbf{K}}^\dagger$ operatori uništavanja i stvaranja fotona, respektivno, $\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{K}}$ jedinični vektor polarizacije, \mathbf{K} talasni vektor fotona, a $C_{\mathbf{K}} = -i[\hbar\omega_{\mathbf{K}}/(2\epsilon_0\mathcal{V})]^{1/2}$, pri čemu \mathcal{V} predstavlja volumen kvantizacije. Iskoristit ćemo pretpostavku da u početnom stanju $|\phi_i(t)\rangle$ nema fotona, te da se u rekombinaciji sa matičnim jonom emituje jedan harmonik, pa konačno stanje $|\phi_f(t)\rangle$ ima jedan visoko-energetski foton, pa za početno i krajnje stanje imamo

$$|\phi_i(t)\rangle = |\psi_{0i}\rangle \exp(-iE_{0i}t/\hbar) |0_{\mathbf{K}}\rangle, \quad (6.8)$$

$$|\phi_f(t)\rangle = |\psi_{0f}\rangle \exp(-iE_{0f}t/\hbar) |1_{\mathbf{K}}\rangle. \quad (6.9)$$

Uvrštavanjem izraza (6.7), (6.8) i (6.9), kao i Lippmann-Schwingerove jednačine, u polazni izraz za S -matrični element (6.4) dobijamo

$$S_{fi} = i \lim_{t' \rightarrow \infty} \lim_{t \rightarrow \infty} \langle \psi_{0f}(t') | \int dt'' \langle 1_{\mathbf{K}} | G(t', t'') | 1_{\mathbf{K}} \rangle C_{\mathbf{K}} \mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{K}}^* \times \exp [i(\omega_{\mathbf{K}} t'' - \mathbf{K} \cdot \mathbf{r})] G_0(t'', t) | \psi_{0i}(t) \rangle. \quad (6.10)$$

Prema Lippmann-Schwingerovoj jednačini vrijedi $\langle 1_{\mathbf{K}} | G(t', t'') | 1_{\mathbf{K}} \rangle = G_0(t', t'')$. Takođe, možemo iskoristiti sljedeće relacije

$$i \lim_{t' \rightarrow \infty} \langle \psi_{0f}(t') | G_0(t', t'') = \langle \phi_f^-(t'') |, \quad (6.11)$$

$$i \lim_{t \rightarrow \infty} G_0(t'', t) | \psi_{0i}(t) \rangle = | \phi_i^+(t'') \rangle. \quad (6.12)$$

Korištenjem Lippmann-Schwingerove jednačine, kao i ova dva izraza, dobijemo za S -matrični element za emisiju višeg harmonika

$$S_{fi} = -iC_{\mathbf{K}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{K}}^* \cdot \mathbf{d}_{fi}(t) \exp [i(\omega_{\mathbf{K}} t'' - \mathbf{K} \cdot \mathbf{r})] dt. \quad (6.13)$$

pri čemu je $\mathbf{d}_{fi}(t)$ vremenski zavisni dipolni matrični element između početnog i krajnjeg stanja

$$\mathbf{d}_{fi}(t) = \langle \phi_f^-(t) | \mathbf{r} | \phi_i^+(t'') \rangle. \quad (6.14)$$

Vektori stanja $|\phi_j^{\pm}(t)\rangle, j = i, f$ zadovoljavaju jednačinu

$$|\phi_j^{\pm}(t)\rangle = |\psi_{0j}(t)\rangle + \int dt' G_0^{\pm}(t, t') H_L(t') |\psi_{0j}(t')\rangle. \quad (6.15)$$

Uvažavajući ovo u izrazu (6.14), dobijamo

$$\mathbf{d}_{fi}(t) = \langle \psi_{0f} | \mathbf{r} | \phi_{0i}(t) \rangle + \mathbf{d}_a(t) + \mathbf{d}_e(t) + \mathbf{d}_{cc}(t), \quad (6.16)$$

gdje je

$$\mathbf{d}_a(t) = \langle \psi_{0f}(t) | \mathbf{r} \int dt' G_0(t, t') H_L(t') | \psi_{0i}(t') \rangle, \quad (6.17)$$

$$\mathbf{d}_e(t) = \int dt' \langle \psi_{0f}(t') | G_0(t', t) H_L(t') \mathbf{r} | \psi_{0i}(t) \rangle, \quad (6.18)$$

$$\mathbf{d}_{cc}(t) = \int dt' \int dt'' \langle \psi_{0f}(t') | H_L(t') G_0(t', t) \mathbf{r} G_0(t, t'') H_L(t'') | \psi_{0i}(t'') \rangle. \quad (6.19)$$

Prvi doprinos u izrazu (6.16), $\langle \psi_{0f} | \mathbf{r} | \phi_{0i}(t) \rangle$, je jednak nuli ukoliko je atomski potencijal sferno-simetričan i ukoliko se radi o istom početnom i konačnom stanju, što je slučaj u generaciji viših harmonika, tako da taj doprinos možemo zanemariti. Drugi doprinos $\mathbf{d}_a(t)$ opisat ćemo na sljedeći način. U početnom trenutku t' dolazi do interakcije sa laserskim poljem, nakon čega se atom jonizuje. Nakon toga, elektron se kreće kroz lasersko polje koje ga vraća matičnom jonu. Vrijeme t' nazivamo vremenom jonizacije. U trenutku t dolazi do rekombinacije elektrona sa jonom, prilikom čega dolazi do emisije višeg harmonika. Sistem pri tome prelazi u konačno stanje $|\psi_{0f}(t)\rangle$. Vrijeme t nazivamo vremenom rekombinacije. Indeks "a" označava apsorpciju

fotona laserskog polja od strane atoma. Treći doprinos $\mathbf{d}_e(t)$ opisuje inverzan proces ovom procesu u kojem se emituje viši harmonik. Odatle indeks "e". Četvrti doprinos $\mathbf{d}_{cc}(t)$ predstavlja proces koji se opisuje u pet koraka. U početnom trenutku t'' dolazi do interakcije laserskog polja sa atomom, nakon čega se atom jonizuje. Drugi korak je kretanje elektrona u laserskom polju od trenutka jonizacije t'' do trenutka t . U trenutku t dolazi do emisije višeg harmonika. U narednom koraku elektron se opet kreće od trenutka t do trenutka t'' kada dolazi do laser-atomske interakcije uz prelaz atoma u konačno stanje $|\psi_{0f}(t'')\rangle$. Ovdje indeks "cc" označava kontinuum-kontinuum prelaze, jer se viši harmonik emituje između dva prostiranja koja uglavnom uključuju kontinualna stanja. Ovi doprinosi se računaju primjenom aproksimacije jakog polja, pri čemu zanemarujemo međudjelovanje sa atomom, u odnosu na međudjelovanje sa laserskim poljem u stanjima između jonizacije i rekombinacije. Greenov operator G_0 mijenjamo sa Gordon-Volkovljevim Greenovim operatorom G_L , koji izražavamo preko Gordon-Volkovljevih talasnih vektora u $\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}$ geidžu. Time dobijamo

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_a(t) = & -i \int d^3\mathbf{k} \langle \psi_{0f} | \mathbf{r} | \mathbf{k} + \mathbf{A}(t) \rangle \\ & \times \int_{-\infty}^t dt' \exp[iS(\mathbf{k}; t, t')] \langle \mathbf{k} + \mathbf{A}(t') | H_L(t') | \psi_{0i} \rangle, \end{aligned} \quad (6.20)$$

gdje je $S(\mathbf{k}; t, t')$ kvaziklasična akcija data kao

$$S(\mathbf{k}; t, t') = E_{0f}t - \int_{t'}^t dt'' \frac{1}{2} [\mathbf{k} + \mathbf{A}(t'')]^2 - E_{0i}t'. \quad (6.21)$$

Integral po impulsu \mathbf{k} se može izračunati kao

$$\begin{aligned} \int d^3\mathbf{k} M(\mathbf{k}; t, t') \exp[S(\mathbf{k}; t, t')] = & \left[\frac{2\pi}{i(t-t')} \right]^{3/2} \exp[S(\mathbf{k}_s; t, t')] \\ & \times \left[1 - \frac{i}{2(t-t')} \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{k}^2} + \dots \right] M(\mathbf{k}; t, t') |_{\mathbf{k}=\mathbf{k}_s(t, t')}. \end{aligned} \quad (6.22)$$

$M(\mathbf{k}; t, t')$ predstavlja proizvod matičnih elemenata koji se pojavljuju u izrazu (6.20). Stacionarni impuls je definisan kao rješenje jednačine $\partial S(\mathbf{k}; t, t') / \partial \mathbf{k} = 0$. Zamjenom $t' = t + \tau$ u relaciji (6.20) za matični element $\mathbf{d}_a(t)$ dobijamo

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_a(t) \approx & -i \left(\frac{2\pi}{i} \right)^{3/2} \int_0^\infty \frac{d\tau}{\tau^{3/2}} \exp[iS(\mathbf{k}_s; t, t + \tau)] \\ & \times \langle \psi_{0f} | \mathbf{r} | \mathbf{k}_s + \mathbf{A}(t) \rangle \langle \mathbf{k}_s + \mathbf{A}(t + \tau) | H_L(t + \tau) | \psi_{0i} \rangle, \end{aligned} \quad (6.23)$$

gdje je \mathbf{k}_s dato relacijom (2.12). Integral po τ predstavlja integral po vremenu putovanja elektrona od trenutka jonizacije t' do trenutka rekombinacije t . Analognim postupkom možemo izvesti izraze i za matricele elemente $\mathbf{d}_e(t)$ i $\mathbf{d}_{ec}(t)$.

Za periodično lasersko polje koje se mijenja sa periodom $T = 2\pi/\omega$, pri čemu je ω frekvencija laserskog polja, vrijedi $H_0(t + T) = H_0(t)$. Zbog toga je moguće uvesti T -matricu koja je povezana sa S -matricom relacijom

$$S_{fi} = -2\pi i \sum_n \delta(\omega_{\mathbf{K}} + E_{0f} - E_{0i} - n\omega) c_{\mathbf{K}} T_{fi}(n). \quad (6.24)$$

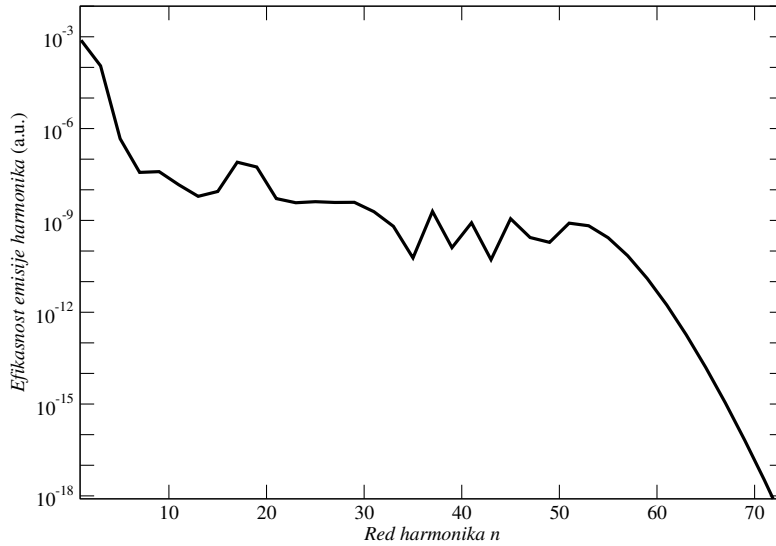
Delta-funkcija u gornjoj relaciji predstavlja zakon očuvanja energije za generaciju viših harmonika. Matrični element $T_{fi}(n)$ je dat relacijom

$$T_{fi}(n) = \int_0^T \frac{dt}{T} \exp[i\omega_{\mathbf{K}} t] \mathbf{e}_{\mathbf{K}}^* \cdot \mathbf{d}_{fi}(t). \quad (6.25)$$

Konačno možemo dobiti izraz za vjerovatnoću emisije harmonika iskazan preko T -matričnog elementa

$$w_{fi}(\omega_{\mathbf{K}}, \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{K}}) = \frac{\omega_{\mathbf{K}}^3}{8\pi^2} |T_{fi}(n)|^2. \quad (6.26)$$

Na slici 6.2 prikazana je efikasnost emisije harmonika u zavisnosti od reda harmonika.



Slika 6.2: Efikasnost emisije harmonika u zavisnosti reda harmonika za atom H u laserskom polju talasne dužine $\lambda = 1060$ nm i intenziteta $I = 1.4 \cdot 10^{14}$ Wcm⁻².

Zaključak

Atomski procesi drugog reda, kao što su dvostruko elektron-atomsko rasijanje, jonizacija iznad praga višeg reda (HATI), odvajanje iznad praga višeg reda (HATD), elektron-jonska rekombinacija sa prethodnim rasijanjem (SLAR) i generacija viših harmonika (HHG), su mogući samo u laserskom polju, a mogu se objasniti tzv. three-step modelom. Drugim riječima, svi ovi procesi se odvijaju u tri koraka, pri čemu drugi korak predstavlja kretanje elektrona u laserskom polju. Dok se kreće u laserskom polju, elektron može apsorbovati energiju (tj. određeni broj fotona) iz laserskog polja, prije nego što se vrati do mete na kojoj se rasije (dvostruko elektron-atomsko rasijanje, HATI, HATD) ili rekombinuje (SLAR, HHG). Zato se u energetske spektrima ovih procesa javljaju više energije nego što je to slučaj sa procesima prvog reda (elektron-atomsko rasijanje, ATI, ATD, LAR).

Za sve ove procese je karakteristično da se u njihovim energetske spektrima javljaju plato strukture koje su oscilatornog karaktera, tj. sadrže jako izražene oscilacije. Platoi završavaju naglim odsjecanjem (eng. cutoff). Pozicije ovih odsjecanja se mogu predvidjeti semiklasičnom analizom datog atomskog procesa, a zavise od ugla rasijanja (rasijanje, dvostruko rasijanje, LAR, SLAR), odnosno, ugla između impulsa izlazećeg elektrona i vektora polarizacije laserskog polja (ATI, HATI, ATD, HATD). Što je ovaj ugao manji, to je dužina platoa koji potiče od procesa drugog reda veća. Za velike uglove, plato koji potiče od procesa drugog reda je kraći od platoa koji potiče od odgovarajućeg procesa prvog reda, što smo pokazali na primjeru elektron-atomskog rasijanja.

Visine samih platoa zavise od vrste atomske (jonske) mete. Plato je utoliko viši, što je meta teža (tj. veća). Takođe, od vrste atomske (jonske) mete zavisi i razlika između visine platoa koji potiče od procesa prvog reda i visine platoa koji odgovara procesu drugog reda.

Bibliografija

- [1] D. B. Milošević, *Elektron-atomsko rasijanje u laserskom polju* (Magistarski rad, Beograd, 1986).
- [2] M. H. Mittleman, *Introduction to the Theory of Laser-Atom Interactions*, 2nd ed. (Plenum Press, New York, 1993).
- [3] R. G. Newton, *Scattering Theory of Waves and Particles*, 2nd ed. (Springer, New York-Berlin, 1982).
- [4] C. J. Joachain, *Quantum Collision Theory*, 3rd ed. (North-Holland, Amsterdam, 1983).
- [5] D. M. Volkov, *Z. Phys.* **94**, 250 (1935).
- [6] H. Shull i G. G. Hall, *Nature* **184**, 1559 (1959).
- [7] D. Andrick i L. Langhans, *J. Phys. B* **9**, L459 (1976).
- [8] D. Andrick i L. Langhans, *J. Phys. B* **11**, 2355 (1978).
- [9] B. Wallbank, V. W. Connors, J. K. Holmes i A. Weingartshofer, *J. Phys. B* **20**, L833 (1987).
- [10] M. Gavrilica (1989). U knjizi F. A. Gianturco, *Collision Theory for Atoms and Molecules* (Plenum Press, New York), str. 175-177.
- [11] A. Weingartshofer, J. K. Holmes, G. Caudle, E. Clarke i H. Krüger, *Phys. Rev. Lett.* **39**, 269 (1977). [*Sov. Phys. JETP* **22**, 844 (1965)].
- [12] Za opsežnu listu referenci pogledati: F. Ehlotzky, A. Jaroń i J. Z. Kamiński, *Phys. Rep.* **297**, 63 (1998).
- [13] S. Sunakawa, *Kvantovaja teorija rassejanija* (Mir, Moskva, 1979).
- [14] M. H. Mittleman i K. M. Watson, *Phys. Rev.* **113**, 198 (1959).

- [15] A. E. S. Green, D. E. Rio i T. Ueda, *Phys. Rev. A* **24**, 3010 (1981).
- [16] A. A. Radzig i B. M. Smirnov, *Reference Data on Atoms, Molecules and Ions* (Springer, Berlin, 1985).
- [17] A. E. S. Green, D. L. Sellin i A. S. Zachor, *Phys. Rev.* **184**, 1 (1969).
- [18] W. Becker, F. Grasbon, R. Kopold, D. B. Milošević, G. G. Paulus i H. Walther, *Adv. At. Mol. Opt. Phys.* **48**, 35 (2002).
- [19] A. Čerkić, *Rasijanje elektrona na atomima u prisustvu jakog laserskog polja* (Magistarski rad, Tuzla, 2005).
- [20] L. V. Keldysh, *Zh. Éksp. Teor. Fiz.* **47**, 1945 (1964) [*Sov. Phys. JETP* **20**, 1307 (1965)].
- [21] N. L. Manakov, A. F. Starace, A. V. Flegel i M. V. Frolov, *Pis'ma Zh. Éksp. Teor. Fiz.* **76**, 316 (2002) [*JETP Lett.* **76**, 258 (2002)].
- [22] J. S. Voronov i N. B. Delone, *Sov. Phys. JETP* **23**, 54 (1966).
- [23] P. Agostini, G. Barjot, J. F. Bonnal, G. Mainfray i C. Manus, *IEEE J. Quantum Electron.* **4**, 677 (1968).
- [24] P. Agostini, F. Fabre, G. Mainfray, G. Petite i N. K. Rahman, *Phys. Rev. Lett.* **42**, 1127 (1979).
- [25] G. G. Paulus, W. Nicklich, H. Xu, P. Lambropoulos i H. Walther, *Phys. Rev. Lett.* **72**, 2851 (1994).
- [26] M. Lewenstein, K. C. Kulander, K. J. Schafer i P. H. Bucksbaum, *Phys. Rev. A* **51**, 1495 (1995).
- [27] M. Busuladžić, A. Gazibegović-Busuladžić i D. B. Milošević, *Laser Phys.* **16**, 289 (2006).
- [28] H. R. Reiss (1996). U knjizi H. G. Muller i M. V. Fedorov (editor), *Super-Intense Laser-Atom Physics IV* (Kluwer, Dordrecht), str. 143.
- [29] D. B. Milošević i B. Piraux, *Phys. Rev. A* **54**, 1522 (1996).
- [30] H. C. Bryant, A. Mohagheghi, J. E. Steward, J. B. Donahue, C. R. Quick, R. A. Reeder, V. Yuan, C. R. Hummer, W. W. Smith, C. Cohen, W. P. Reinhardt i L. Overman, *Phys. Rev. Lett.* **58**, 2412 (1987).
- [31] R. Reichle, H. Helm i I. Yu. Kiyani, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 243001 (2001).

- [32] I. Yu. Kiyani i H. Helm, Phys. Rev. Lett. **90**, 183001 (2003).
- [33] A. Gazibegović-Busuladžić, D. B. Milošević i W. Becker, Phys. Rev. A **70**, 053403 (2004).
- [34] G. F. Gribakin i M. Yu. Kuchiev, Phys. Rev. A **55**, 3760 (1997).
- [35] A. Jaroń, J. Z. Kamiński i F. Ehlotzky, Phys. Rev. A **61**, 023404 (2000).
- [36] A. Jaroń, J. Z. Kamiński i F. Ehlotzky, J. Phys. B **34**, 1221 (2001).
- [37] D. B. Milošević i F. Ehlotzky, Phys. Rev. A **65**, 042504 (2002).
- [38] D. B. Milošević i F. Ehlotzky, J. Mod. Opt. **50**, 657 (2003).
- [39] A. McPherson, G. Gibson, H. Jara, U. Johann, T. S. Luk, I. A. McIntyre, K. Boyer, and C. K. Rhodes, J. Opt. Soc. Am. B **4**, 595 (1987).
- [40] J. Wildenauer, J. Appl. Phys. **62**, 41 (1987).
- [41] M. Ferray, A. L'Huillier, F. X. Li, L. A. Lompré, G. Mainfray i C. Manus, J. Phys B **21**, L31 (1988).
- [42] D. B. Milošević i F. Ehlotzky, Adv. At. Mol. Opt. Phys. **49**, 373 (2003).
- [43] P. Salières, A. L'Huillier, Ph. Antoine i M. Lewenstein, Adv. At. Mol. Opt. Phys. **41**, 83 (1999).
- [44] P. B. Corkum, Phys. Rev. Lett. **71**, 1994 (1993); K. C. Kulander, K. J. Schafer, and K. L. Kraus, Super-Intense Laser-Atom Physics, edited by B. Piraux, A. L'Huillier, K. Rzażewski, Vol. 316 of NATO Advanced Studies Institute, Series B: Physics (Plenum, New York, 1993), p. 95.
- [45] S. Odžak i D. B. Milošević, Phys. Rev. A **72**, 033407 (2005).
- [46] D. Habibović, *Generacija viših harmonika na atomima* (Diplomski rad, Sarajevo, 2013).