Dirac, Majorana i Weyl fermioni kao moguća stanja elementarnih čestica

Sadržaj

1 Uvod

“Šta je to svjetlost?”, upitala me je pokojna profesorica Petra Materić prvog gimnazijskog dana prilikom upoznavanja sa svojim novim razredom. Naslonjena na zid, u nadi da sakrijem koliko se tresem od straha ispred dvadeset i sedam znatiželjnih pogleda, počela sam odgovarati. Tada nisam ni slutila da će me upravo to pitanje, kao i mnoga druga koje je profesorica stalno postavljala (u nadi da aktivira naše zaljubljene i zbunjene gimnazijske glave), najviše zaintrigirati i uvesti u svijet fizike u kojem danas živim.

Sada, kada sam na završetku dodiplomskog studija, uvidjela sam težinu ovog pitanja i kako je dug bio put pronalaska pravih odgovora. Na tom putu, fizičari su formulisali dvije izuzetno bitne oblasti fizike 20-tog stoljeća. Naravno, one nisu nastale kao djelo jednog čovjeka, niti u kratkom vremenskom periodu, već su nastajale višegodišnjim radom i razvojem ljudske misli, nauke i tehnologije.

Prva od njih je *specijalna teorija relativiteta* koja proučava tijela koja se kreću brzinama bliskim brzini svjetlosti u vakuumu. Kako je to najveća izmjerena brzina u prirodi i iznosi $c \approx 3 \times 10^8$ m/s, specijalna teorija relativiteta je dovela do generalizacije i nove formulacije zakona fizike, jer su sve dotadašnje formule bile nedovoljne za opis ovakvog kretanja. Na taj način je specijalna teorija relativiteta proizvela i temeljne promjene u predodžbama prostora i vremena, što se odrazilo i u ljudskoj spoznaji i imalo svog odraza i u razvoju umjetnosti.

Druga oblast je *kvantna mehanika* koja proučava mikrosvijet. Ona je fundamentalna teorija strukture i procesa na nivou atoma, molekula i nukleusa. Mnogi tvrde da je kvantna mehanika jedno od najvećih dostignuća čovječanstva, koja ujedno i dobro funkcionira. Uloga kvantne mehanike je izuzetna, jer ne samo da uz pomoć nje shvatamo mikrosvijet, nego na taj način proučavamo i građu i evoluciju svemira u kojem živimo. Za njezinu formulaciju, najzaslužnija su tri naučnika, a to su: Edwin Schrödinger, David Hilbert i Paul Adrien Maurice Dirac.

Ujedinimo li specijalnu teoriju relativiteta i kvantnu mehaniku, dobit ćemo teoriju koja u potpunosti objašnjava svojstva mikroskopskih objekata koji se kreću brzinama bliskim brzini svjetlosti u vakuumu. Ovim spojem dobivamo teoriju koja objašnjava svojstva elementarnih čestica i interakcije među njima, te uz pomoću nje poznajemo svijet nakon 10^{-43} s poslije Velikog praska. Naziv ove teorije je *kvantna teorija polja*.

Zbog toga, kvantna teorija polja će mi poslužiti kao glavni alat za moje lično interesovanje, za moj diplomski rad u kojem ću nastojati što bolje objasniti Diracove, Majoranine i Weylove fermione.

Kvantna teorija polja nastajala je u historijski veoma intenzivnom periodu za čovječanstvo. Naime, potraga za relativističkim jednačinama koje bi opisivale ponašanje elementarnih čestica počinje krajem 1920-tih godina i traje do kraja 1940-tih godina. U tom periodu, od skoro dvije decenije, naučnici koji su radili na ovom području fizike nailazili su na mnoge probleme. Ti problemi bili su, između ostalog, i egzistencijalne prirode, uključujući neimaštinu, ratove i politička previranja tih godina.

Međutim, najveći problem sa kojim se jedan naučnik može susresti kada radi na formulaciji nove teorije jeste neodobravanje, tj. neslaganje drugih naučnika i sredine sa njegovim radom. Tako su mnogi radovi iz ovog perioda priznati tek godinama nakon njihove publikacije, a za neke od iznesenih postavki se čak smatralo da sama teorija nije fizikalna i da se treba u potpunosti promijeniti. U takvoj atmosferi ipak su nastali radovi Klein-Gordona, Diraca, Proce, Majorane i mnogih drugih fizičara.

Fizičari tog vremena uglavnom su svoje istraživanje bazirali na proučavanju kretanja pojedinačnih čestica i formulaciji jednačina koje bi opisale to kretanje.

Historijski, prva jednočestična relativistička jednačina koja je formulisana bila je Klein-Gordonova jednačina iz 1926. godine. Ova jednačina je prouzrokovala dosta problema prilikom pokušaja interpretacije rezultata koje je ona davala. Jedan od problema bila je pojava negativne gustoće vjerovatnoće jer se radilo o diferencijalnoj jednačini drugog reda po vremenu, a drugi problem je bila pojava stanja sa negativnom energijom koja su u to vrijeme smatrana nefizikalnim.

Dvije godine kasnije Dirac je želio riješiti ove probleme i tako je došao do nove jednačine koja je opisivala ponašanje elektrona. On je predvidio i postojanje njihovih antičestica koje imaju istu masu i energiju, ali suprotan predznak naboja.

Nakon što je publikovana Diracova jednačina, Weyl je 1929. godine pokazao jednostavniju jednačinu od Diracove za slučaj fermiona koji nemaju masu. S druge strane, godinu dana nakon toga, Pauli je prilikom posmatranja β-raspada predlažio nove neutralne bezmasivne čestice, danas poznate pod nazivom *neutrino*. Predložio ih je s ciljem objašnjavanja kontinuiranog spektra zračenja elektrona u β raspadu. Kako su neutrini uvedeni kao fermioni bez mase, ispostavilo se da bi njihovo ponašanje mogla objašnjavati upravo Weylova jednačina.

Vjerovanje da je neutrino Weylova čestica trajalo je dugi niz godina, sve dok Majorana 1937. godine nije predložio da neutrini kao električki neutralne čestice mogu biti same sebi antičestice. Odgovor na pitanje da li su neutrini doista Weyl fermioni stiže početkom 1960-tih godina kada je krenula potraga za njima i želja za njihovom detekcijom. Preciznijim mjerenjima se ustanovilo da neutrini ipak imaju masu, jako malu, ali opet različitu od nule i da zbog toga ne mogu biti Weylove čestice. Mi danas znamo da niti jedna opažena čestica ne može biti Weylova čestica, ali nam je Weylova formulacija veoma korisna kao gradivna jedinica kvantne teorije polja.

Obzirom da za proučavanje materije i građe svemira u kojem živimo posmatramo sudare elementarnih čestica ubrzanih do velikih energija, pri čemu dolazi do stalnog stvaranja (anhilacije) čestica, jednočestične relativističke jednačine nisu adekvatne. To znači da je kvantna teorija polja višečestična teorija u kojoj kvantna stanja opisujemo *kvantnim poljima* sa tačno određenim brojem i vrstama čestica (odakle i potiče sami naziv teorije).

Danas znamo da elementarne čestice definišemo kao objekte koji nemaju unutrašnju strukturu, ali se mogu raspasti. Model koji ih opisuje naziva se *standardnim modelom.* Najveću zaslugu za njegov razvoj 1960-tih godina imali su: Sheldon Lee Glashow, Abdus Salam i Steven Weinberg. U ovom modelu su ujedinjene tri od ukupno četiri interakcije u prirodi, tj. ujedinjene su slaba, jaka i elektromagnetna interakcija. Standardni model sadrži 12 nositelja interakcija: 8 gluona kao nositelja jake interakcije, W^+, W^- i Z bozona kao nositelja slabe interakcije i fotona γ, nositelja elektromagnetne interakcije. Pored nositelja, standardni model sadrži i 15 elementarnih čestica koje se dijele u dvije velike skupine: bozone i fermione. Podjela je izvršena prema njihovoj izuzetno bitnoj karakteristici, njihovom spinu, pa prema toj podjeli postoje i dvije vrste kvantnih polja koje ih opisuju. To su bozonsko polje koje opisuje čestice sa cjelobrojnim spinom, tj. bozone i fermionsko polje koje opisuje čestice sa polucijelim spinom, odnosno fermione.

Rješenje za sve probleme u dotadašnjoj formulaciji kvantne teorije polja došlo je sa idejom o kvantizaciji ovih kvantnih polja prema određenim pravilima. Formulaciji ovih pravila, koja ću detaljno opisati u svom radu, pomogao je Pauli postulirajući da se bozoni podvrgavaju Bose-Einsteinovoj statistici, a fermioni, koji poštuju Paulijev princip isključivosti, Fermi-Diracovoj statistici, jer kada zamijenimo dva fermiona dobivamo antisimetrično stanje.

U svom radu, prvo ću detaljno objasniti nastanak i probleme relativističkih jednačina koje opisuju elementarne čestice, a onda ću razmotriti tri fermionska polja: Dirac, Majorana i Weyl polje, kao i njihove definicije i veze.

Poseban naglasak ću dati na povezanost ovih fermionskih polja sa Lorentzovom grupom, kao i utjecaj diskretnih simetrija na njih. Za sve to mi je potrebna izuzetno važna relacija specijalne teorije relativiteta, a to je relacija koja opisuje energiju elementarnih čestica.

Energija elementarnih čestica data je relacijom

$$E^2 = \vec{p}^{\,2} c^2 + m^2 c^4, \tag{1}$$

gdje je m masa čestice, $\vec{p}$ njezin impuls, a

$$E_0{}^2 = m^2c^4 \tag{2}$$

energija mirovanja date čestice.

1.1 Prirodni sistem jedinica

Zbog jednostavnosti, u većem dijelu diplomskog rada koristit ću se tzv. *prirodnim sistemom jedinica* u kojem konstante $\hbar$ i c poprimaju vrijednost:

$$\hbar = c = 1, \tag{3}$$

gdje su

$$h = 6,62 \times 10^{-34}\,\mathrm{Js}, \tag{4}$$

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1.05457168 \times 10^{-34}\,\mathrm{Js} \tag{5}$$

i

$$c = 299792458\,\mathrm{ms}^{-1}. \tag{6}$$

Ove konstante su sastavni dio svih jednačina kvantne teorije polja, tako da upotrebom prirodnog sistema jedinica jednačine postaju jednostavne i pregledne. To je moguće obzirom da svaka oblast fizike bira sistem jedinica koji joj najviše odgovara kako bi izrazi bili pregledni i logični.

Za energiju u ovakvom sistemu je izabrana jedinica elektronvolt eV, definisana kao energija potrebna da se poveća električni potencijal elektrona za jedan volt.

$$1\,\mathrm{eV} = 1.6022 \times 10^{-19}\,\mathrm{J} \tag{7}$$

Prema tome, relacija za energiju elementarne čestice može se napisati u jednostavnijoj formi koja glasi:

$$E^2 = \vec{p}^{\,2} + m^2. \tag{8}$$

Iz ove relacije vidimo da i energija i impuls i masa relativističke čestice imaju istu dimenziju. Kao dokaz, uzet ćemo relaciju za energiju mirovanja i izraziti masu iz nje:

$$m^2 = \frac{E^2}{c^4}, \tag{9}$$

pa je dimenzija mase:

$$[m] = [p] = [E] = 1. \tag{10}$$

Odnosno, općenito govoreći, u prirodnom sistemu jedinica sve veličine imaju dimenziju energije na neki stepen, odnosno potenciju.

Kao primjer možemo vidjeti koje jedinice ima položaj u ovom sistemu. Uzmimo Heisenbergovu relaciju neodređenosti

$$\Delta x \cdot \Delta p \leq \frac{\hbar}{2}. \tag{11}$$

Kako je $\hbar = 1$, što znači da je $\hbar$ bezdimenzionalna veličina, a impuls ima iste dimenzije kao i energija, slijedi da je dimenzija položaja

$$[x] = [E]^{-1} = -1 \tag{12}$$

gdje je

$$1\,\mathrm{eV} = 8065.5447\,\mathrm{cm}^{-1}. \tag{13}$$

2 Jednačina za spin 0 čestice

2.1 Klein-Gordonova jednačina

Prvi pokušaj formulacije jednačine koja bi opisivala kretanje elementarnih čestica, mikroskopskih objekata koji se kreću brzinama bliskim brzini svjetlosti, izveden je na *principu korespondencije*, pri čemu su kombinovane relacije i principi kvantne mehanike i specijalne teorije relativiteta.

U to vrijeme bile su poznate Schrödingerova talasna jednačina kvantne mehanike

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = E\psi, \tag{14}$$

i relacija koja povezuje energiju i impuls relativističke slobodne čestice

$$E^2 = \vec{p}^{\,2}c^2 + m^2c^4. \tag{15}$$

Na osnovu njih, 1926. godine, dva fizičara, Oscar Klein i Walter Gordon predložili su prvu relativističku jednačinu za opis kretanja elektrona, koja je po njima i dobila ime[1].

Do formulacije ove jednačine, Klein i Gordon su se suočili sa nekolicinom poteškoća koje su morali razriješiti s ciljem ujedinjenja dvije teorije. Jedan od tih problema bio je da Schrödingerova talasna jednačina, koja u klasičnom slučaju zadržava svoju strukturu u odnosu na Galilejeve transformacije, ne zadržava svoju strukturu i u odnosu na Lorentzove transformacije (karakteristične za relativistički slučaj kretanja brzinama bliskim brzini svjetlosti). Razlog za to se krio u različitim stepenima diferenciranja po vremenskim i prostornim koordinatama u Schrödingerovoj jednačini.

Da bi se formirala relativistička talasna jednačina bilo je potrebno dovesti do poopštenja Schrödingerove jednačine, tako da bude Lorentz invarijantna i da u graničnom slučaju, kada se radi o brzinama $v << c$, poprimi svoj dobro poznati klasični oblik.

Klein i Gordon su posmatrajući izraz za energiju relativističke mehanike, na osnovu principa korespodencije, energiju E i impuls $\vec{p}$ zamijenili sa diferencijalnim operatorima:

$$\hat{E} = i\hbar\frac{\partial}{\partial t} \tag{16}$$

i

$$\hat{\vec{p}} = \frac{\hbar}{i}\vec{\nabla} = -i\hbar\frac{\partial}{\partial\vec{x}}, \tag{17}$$

[1]Poznata je i pod imenom Klein-Gordon-Fock jednačina, po ruskom fizičaru Vladimiru Focku koji je iste godine došao do identične jednačine.

respektivno. Da bi se došlo do što elegantnije forme jednačine, uz princip korespodencije uzeli su u obzir relativističku notaciju Minkowskog[2], u kojoj se koristimo *kontravarijantnim* (gornjim) i *kovarijantnim* (donjim) indeksima za četvorovektore. Prema ovoj notaciji, četvorovektor impulsa dat je relacijom:

$$p^{\mu} = \left(\frac{E}{c}, \vec{p}\right) \tag{18}$$

gdje su relativistička energija E i relativistički impuls $\vec{p}$ čestice:

$$E = \gamma m c^2, \quad \vec{p} = \gamma m \vec{v}, \tag{19}$$

pri čemu je

$$\gamma = \left[1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}}. \tag{20}$$

U ovom izlaganju ću za početak eksplicitno pisati $\hbar$ i c u relacijama, da bi jasno vidjeli njihovu punu formu i način na koji se izvode, a zatim ću, kao što sam već navela, radi jednostavnosti i preglednosti preći na prirodni sistem jedinica.

Na osnovu relativističke notacije, diferencijalni operator impulsa onda postaje:

$$\hat{p}^{\mu} = i\hbar \frac{\partial}{\partial x_{\mu}} = i\hbar \partial^{\mu}, \tag{21}$$

gdje četvorodimenzionalni gradijent obilježavamo sa:

$$\partial^{\mu} = \frac{\partial}{\partial x_{\mu}} = \left(\frac{\partial}{c\partial t}, -\vec{\nabla}\right). \tag{22}$$

Da bi mogli izvesti Klein-Gordonovu jednačinu do kraja, potrebno je još pomnožiti dva četvorovektora impulsa, tj. izraziti njihov skalarni proizvod. Skalarni proizvod četvorovektora impulsa je dat *disperzionom relacijom*

$$p_{\mu} p^{\mu} = \frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^{\,2} = m^2 c^2, \tag{23}$$

koja nam daje upravo vezu relativističke energije i impulsa čestice, već napisanu kao

$$E^2 = \vec{p}^{\,2} c^2 + m^2 c^4. \tag{24}$$

Kako imamo sve potrebne elemente, možemo početi sa izvođenjem Klein-Gordonove jednačine. Nakon zamjene E i $\vec{p}$ sa njihovim diferencijalnim operatorima, relativistička energija čestice je

$$-\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} = -\hbar^2 c^2 \vec{\nabla}^2 + m^2 c^4. \tag{25}$$

[2]Relativistička notacija je detaljno objašnjena u prvom dodatku.

Zadatak koji slijedi jeste ovu relaciju uvrstiti u Schr$\ddot{o}$dingerovu jednačinu

$$\left(\frac{1}{c^2}\,\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\vec{\nabla}^{\,2}\right)\psi+m^2\frac{c^2}{\hbar^2}\;\psi=0, \tag{26}$$

gdje koristeći dodatak o relativističkoj notaciji možemo zaključiti da je prvi član zapravo proizvod četvorodimenzionalnih gradijenata $\partial_\mu\partial^\mu$. Operator o kojem je riječ se naziva d'Alambertov operator

$$\frac{1}{c^2}\,\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\vec{\nabla}^{\,2}=\partial_\mu\partial^\mu. \tag{27}$$

Pošto iz relativističke elektrodinamike znamo da je d'Alambertov operator Lorentz invarijantan, slijedi da je onda i Klein-Gordonova jednačina Lorentz invarijantna, što smo od početka i željeli postići. Klein-Gordonova jednačina se može napisati u više kompaktnijih formi. Jedna od njih, koja se i najčešće koristi je

$$(\partial^\mu\partial_\mu+m^2)\psi=0. \tag{28}$$

Ova jednačina upravo predstavlja Klein-Gordonovu jednačinu u prirodnom sistemu jedinica. Rješenja Klein-Gordonove jednačine možemo predstaviti u vidu ravnih talasa

$$\psi=Ce^{-\frac{i}{\hbar}p_\mu x^\mu}, \tag{29}$$

gdje je C faktor normiranja, a $p_\mu x^\mu$ skalarni proizvod četvorovektora impulsa i položaja[3]. U nastavku ćemo proizvod četvorovektora definisati kao

$$p_\mu x^\mu=p\cdot x. \tag{30}$$

U uvodu sam rekla da je Klein-Gordonova jednačina proizvela dosta problema prilikom interpretacije novih rezultata sa kojima se fizičari do tada nisu susretali. Ti problemi su pojava negativne energije i negativne gustoće vjerovatnoće.

Kada je u pitanju energija čestice koju opisuje ova jednačina, data izrazom za E^2, iz njega možemo zaključiti da energija E relativističke čestice ima i pozitivna i negativna stanja, a mi smo navikli samo na čestice sa pozitivnom energijom. Odnosno, stanja sa negativnim energijama smo odbacivali kao nefizikalna. Zbog ovog su problema pojedinci smatrali da je Klein-Gordonova jednačina neispravna i da se mora pronaći nova jednačina. Međutim, u slučaju kvantne teorije polja ne smijemo odbacivati stanja sa negativnim energijama, jer ona, kako ćemo kasnije vidjeti u Diracovom radu, predstavljaju antičestice.

[3] Četvorovektori su definisani u dodatku o relativističkoj notaciji.

Također, Klein-Gordonova jednačina vodi ka negativnim gustoćama vjerovatnoće $\rho = |\psi|^2$. Razlog se krije u tome što je ona diferencijalna jednačina drugog reda po vremenu i prvog reda po prostornim koordinatama, što stvara smetnju specijalnoj teoriji relativiteta koja prostor i vrijeme tretira kao cjelinu. Zbog toga, relativistička generalizacija Schrödingerove jednačine mora imati izvode po vremenu i prostoru koji su simetrični, odnosno izvode istog reda da bi gustoća vjerovatnoće, da se čestica u određenom vremenskom trenutku nalazi u tački prostora, bude pozitivna veličina.

2.2 Klein-Gordonovo polje

S vremenom je došlo do razvoja teorije polja, prvo klasične teorije polja, a potom i kvantne teorije polja. Potreba za poljima se javila kada se ustanovilo da se na tako velikim, relativističkim energijama koje čestice imaju stalno stvaraju i anhiliraju čestice prilikom njihovih sudara. Tako da se ne može govoriti o jednočestičnoj teoriji, nego o višečestičnoj teoriji u kojoj za opis stanja koristimo polja koja u sebi sadrže i vrstu i broj elementarnih čestica.

Zbog toga se Klein-Gordonova jednačina mora preformulisati za ova polja. Historijski gledano, prvo su se posmatrala klasična polja $\phi(\vec{x}, t)$ koja su pridružena svakoj tački u prostoru i za njih Klein-Gordonova jednačina postaje:

$$(\partial^\mu \partial_\mu + m^2)\phi(\vec{x}, t) = 0, \tag{31}$$

sa rješenjima u vidu ravnih talasa. Ovi ravni talasi se dalje mogu razviti po Fourijerovom razvoju u red kao:

$$\phi = \int d^3p \; (a(p)\; e^{-ip\cdot x} + a^*(p)\; e^{ip\cdot x}) \qquad \text{za} \qquad p^0 > 0. \tag{32}$$

Vidimo da je Fourijerov razvoj podijeljen na dva dijela, dio sa pozitivnim frekvencijama i dio sa negativnim frekvencijama.

Kako nas interesuje kvantna teorija polja, klasična polja se trebaju kvantizirati. To znači da klasična polja $\phi(\vec{x}, t)$ i $\pi(\vec{x}, t) = i\hbar\phi^*$ postaju hermitski operatori:

$$\hat{\phi}(\vec{x}, t), \tag{33}$$

odnosno

$$\hat{\pi}(\vec{x}, t). \tag{34}$$

Prilikom ove kvantizacije, koja se inače zove drugom kvantizacijom, koeficijenti Fourijerovog razvoja također postaju operatori, tj. $a(p)$ postaje $\hat{a}(p)$, dok $a^*(p)$ postaje njemu hermitski konjugovan operator $\hat{a}^\dagger(p)$.

Prije nego što objasnim pravila i način na koji se Klein-Gordonovo polje kvantizira, potrebno je istaći šta zapravo ovo polje opisuje. Klein i Gordon su počeli sa svojim radom s ciljem da formulišu relativističku talasnu jednačinu koja će opisivati kretanje elektrona. Međutim, kada se uzmu u obzir kvantna teorija polja i spin čestice, mi danas znamo da elektrone koji imaju spin 1/2 opisuje Diracova jednačina, a Klein-Gordonova jednačina čestice sa spinom 0.

Jedan od primjera čestica sa spinom 0 su π mezoni. Sada znamo da su π mezoni kompozitne čestice koje se sastoje od jednog kvarka i jednog antikvarka. Postoje tri π mezona: π^+, π^0 i π^- .

Oni nastaju prilikom sudara kozmičkih zraka, koje vode porijeklo od Sunca, drugih zvijezda i nebeskih tijela, sa Zemljinom atmosferom. Pri tome se stvaraju slapovi (kiše) novih elementarnih čestica. Ovi sudari se dešavaju u Zemljinoj gornjoj atmosferi, tako da π mezoni ne dospijevaju do Zemljine površine.

Mezone je 1935. godine predložio Hideki Yukawa kao nositelje jake sile koja održava stabilnost jezgra, tj. onemogućava protonima da se razdvoje usljed Coulombovog odbijanja. Naziv mezoni potiče od talijanske riječi *mezzo* što u prijevodu znači pola, srednje, sredina, pa mezoni predstavljaju čestice srednje težine.

Nakon Yukawinog teorijskog predviđanja postojanja mezona, eksperimentalno su otkriveni π mezoni od strane dvije grupe naučnika pomoću fotografskih emulzija postavljenih na visokim nadmorskim visinama da hvataju kozmičke zrake.

Pored π mezona, postoji još čestica koje imaju spin 0. Jedna od njih je i Higgsov bozon koji je trenutno u fokusu interesovanja nauke. Ovdje je bitno da naglasim da čestice koje imaju spin $s = 0$ imaju cjelobrojni spin i da spadaju u kategoriju čestica koje se zovu bozoni.

Ponašanje bozona opisuje Bose-Einsteinova statistika koja pokazuje njihovu distribuciju po energetskim stanjima. Za bozone je karakteristično da nije moguće razlikovati dva bozona i da se oni mogu naći u istim kvantnim stanjima. Po tome se razlikuju od fermiona, čestica sa polucjelobrojnim spinom u koje spada i sam elektron. Fermione opisuje Fermi-Diracova statistika i za njih vrijedi Paulijev princip isključivosti koji kaže da se dva fermiona ne mogu naći u istom kvantnom stanju.

Zbog ovih krucijalnih razlika između bozona i fermiona postoje i razlike između kvantnih polja koja ih opisuju. Ova kvantna polja se kvantiziraju prema različitim pravilima. Prvo ću izložiti pravila kvantizacije polja čestica spina 0, a u kasnijem izlaganju o Diracovoj jednačini i pravila kvantizacije polja čestice spina 1/2.

2.3 Kvantizacija Klein-Gordonovog polja

Obzirom da Klein-Gordonovo polje opisuje čestice sa spinom nula, za njega, kao i za svako drugo bozonsko polje vrijede pravila kvantizacije u kojima operatori kvantnih polja uvažavaju *komutacione relacije* za isti vremenski trenutak:

$$[\hat{\phi}(\vec{x},t),\hat{\pi}(\vec{x}\,',t)] = i\delta^3(\vec{x}-\vec{x}\,'), \tag{35}$$

$$[\hat{\phi}(\vec{x},t),\hat{\phi}(\vec{x}\,',t)] = [\hat{\pi}(\vec{x},t),\hat{\pi}(\vec{x}\,',t)] = 0. \tag{36}$$

Ove komutacione relacije su nam date u Heisenbergovoj slici u kojima su operatori vremenski zavisni. Komutator dva proizvoljna operatora $\hat{A}$ i $\hat{B}$ definišemo na slijedeći način

$$[\hat{A},\hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}. \tag{37}$$

Veoma nam je bitno prikazati kako izgledaju operatori Klein-Gordonovog polja u Fourijerovom razvoju da bi mogli izračunati Hamiltonijan i impuls Klein-Gordonove čestice. Izrazi za njih su dati relacijama

$$\hat{\phi}(\vec{x},t) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\,\frac{1}{\sqrt{2E}}\,(\hat{a}(p)\,e^{-ip\cdot x} + \hat{a}^\dagger(p)\,e^{ip\cdot x}), \tag{38}$$

$$\hat{\pi}(\vec{x},t) = \frac{\partial\hat{\phi}}{\partial t}. \tag{39}$$

Tako da je Hamiltonijan Klein-Gordonovog polja dat relacijom:

$$\hat{H} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\,E\,(\hat{a}^\dagger(p)\hat{a}(p) + \hat{a}(p)\hat{a}^\dagger(p)) \tag{40}$$

izražen preko dvije vrste operatora.

Prvi operator $\hat{a}(p)$ je operator poništavanja čestice mase m i energije E, a drugi $\hat{a}^\dagger(p)$ je operator stvaranja čestice mase m i energije E. Za njih vrijede slijedeće komutacione relacije:

$$[\hat{a}(p),\hat{a}^\dagger(p')] = \delta^3(\vec{p}-\vec{p'}), \tag{41}$$

$$[\hat{a}(p),\hat{a}(p')] = [\hat{a}^\dagger(p),\hat{a}^\dagger(p')] = 0. \tag{42}$$

2.4 Zašto komutacione relacije?

Uzmimo kompleksna Klein-Gordonova polja, odnosno uzmimo operatore polja $\hat{\phi}(\vec{x},t)$ i $\hat{\phi}^\dagger(\vec{x},t)$, sa različitim vremenima x_0 i y_0. Tada će opšta komutaciona relacija glasiti

$$i\Delta(x-y) := [\hat{\phi}(x),\hat{\phi}^\dagger(y)]. \tag{43}$$

Funkcija $\Delta(x-y)$ je Pauli-Jordanova funkcija veoma interesantnih karakteristika. Ona je Lorentz-invarijantna, zadovoljava homogenu Klein-Gordonovu jednačinu i što je najbitnije

$$\Delta(x-y) = 0 \qquad \text{za} \qquad (x-y)^2 < 0, \tag{44}$$

tj. postaje nula izvan svjetlosnog konusa. Sa ovom karakteristikom našli smo odgovor na pitanje zašto prilikom kvantizacije Klein-Gordonovih polja koristimo komutacione relacije. Naime, u kvantnoj mehanici kada komutator dva operatora ima vrijednost nula, to znači da se dvije opservable koje odgovaraju tim operatorima mogu mjeriti istovremeno. S druge strane, u kvantnoj teoriji polja ova činjenica znači da se mjerenja u jednoj tački prostora mogu odvijati nesmetano od mjerenja u drugoj tački prostora, tj. očuvana je *kauzalnost*.

Dakle, razlog korištenja komutacionih relacija jeste očuvanje principa kauzalnosti. Ako je on očuvan, onda svaka čestica ima svoju antičesticu iste mase i energije, ali suprotnog predznaka naboja.

Za kraj ovog poglavlja mogu zaključiti da su se sve poteškoće vezane za Klein-Gordonovu jednačinu, od stanja sa negativnim energijama do pojave negativne gustoće vjerovatnoće, riješile drugom kvantizacijom Klein-Gordonovog polja, odnosno uvođenjem same kvantne teorije polja i definisanjem šta ovo polje ustvari opisuje.

3 Jednačina za spin 1/2 čestice

3.1 Diracova jednačina

Nakon razmatranja Klein-Gordonove jednačine, posvetit ćemo pažnju i proučavanju Diracove jednačine koja je publikovana dvije godine poslije, tačnije 1928. godine.

Dirac[4] je započeo svoj rad na području kvantne teorije polja s ciljem rješavanja problema koje je Klein-Gordonova jednačina nosila sa sobom. On je u konačnici došao do formulacije potpuno nove jednačine, koja je u skladu sa prinicipima kvantne mehanike i principima specijalne teorije relativiteta. Zbog toga se smatra da je Diracova jednačina prva jednačina koja je uspjela iskombinovati ove principe u potpunosti.

Značaj Diracove jednačine je izuzetan. Danas znamo da Diracova jednačina opisuje ponašanje čestica koje imaju spin 1/2, među kojima je i elektron za kojeg je Dirac prvobitno i formulisao svoju jednačinu. Uvođenjem spina kao rezultata spoja kvantne mehanike i specijalne teorije relativiteta, ispostavilo se da Diracova jednačina opisuje ponašanje ne samo elektrona, nego i svih fermiona, tj. čestica sa polucjelobrojnim spinom. Također, ova jednačina je Diracu omogućila da predvidi i postojanje nove forme materije, tzv. antimateriju, koju predstavljaju antičestice koje imaju istu masu i energiju kao i čestice, ali suprotan predznak naboja. Sve ovo, Dirac je postigao uvodeći nove matematičke objekte koji su danas osnova fizike i o kojima će biti više riječi.

Dirac je još kao dvadesettrogodišnji student počeo raditi na razvoju kvantne mehanike. Jako neobičnog i diskretnog karaktera, oblikovao je vlastitu viziju kvantne mehanike koristeći komutatore i notaciju koja nosi njegovo ime. Ako tome dodamo i njegov rad na kvantnoj teoriji polja, a kojeg obuhvatam u svom diplomskom radu, drugi naučnici i kritičari ne griješe kada kažu da sve što je Dirac radio zapravo predstavlja jedan od najvećih uspjeha teorijske fizike ikada.

Kao što sam već istakla, Dirac je u svom izvođenju jednočestične relativističke jednačine krenuo od Klein-Gordonove jednačine s ciljem da riješi pojavu negativne gustoće vjerovatnoće i pojavu stanja sa negativnim energijama.

Prvi problem, problem pojave negativne gustoće vjerovatnoće, Dirac je

[4]Paul Adrien Maurice Dirac (8.8.1902-20.10.1984.) je engleski teoretski fizičar koji je dao najvažnije doprinose ranom razvoju kvantne mehanike i kvantne elektrodinamike. Formulisao je Diracovu jednačinu koja opisuje ponašanje fermiona i predvidio antimateriju. Dirac je dobio Nobelovu nagradu 1933. godine zajedno sa Erwinom *Schrödingerom* za otkriće novih formi teorije atoma.

riješio nastojanjem da njegova jednačina bude diferencijalna jednačina sa simetričnim izvodima po prostornim i vremenskim koordinatama, odnosno da su izvodi istog reda. S tim na umu, Dirac je formulisao Lorentz-invarijantan Hamiltonijan dat slijedećom relacijom

$$H = -i\hbar c\vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} + \beta mc^2, \tag{45}$$

tako da je zadovoljena potreba specijalne teorije relativiteta da se prostor i vrijeme tretiraju na isti način. Već u izrazu za Hamiltonijan možemo primijetiti nove matematičke objekte koje je Dirac uveo prilikom izvođenja svoje jednačine. To su:

$$\vec{\alpha} = (\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3) \tag{46}$$

i

$$\beta \tag{47}$$

hermitske matrice dimenzija 4×4 za koje vrijedi da je $\alpha^{j+} = \alpha^j$ i $\beta^+ = \beta$. Strukturu ovih matrica opisuje Cliffordova algebra[5] koju u slučaju Diracove jednačine jednostavnije zovemo Diracovom algebrom. Ove hermitske matrice imaju slijedeći oblik

$$\alpha^j = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^j \\ \sigma^j & 0 \end{pmatrix} \qquad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{48}$$

pri čemu su σ^j Paulijeve matrice dimenzija 2×2:

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{49}$$

a 1 jedinična matrica dimenzija 2×2. One međusobno antikomutiraju, odnosno zadovoljavaju relacije:

$$\alpha^j \alpha^k + \alpha^k \alpha^j = 2\delta^{jk}, \tag{50}$$

$$\alpha^j \beta + \beta \alpha^j = 0. \tag{51}$$

Njihove značajne osobine date su i izrazima:

$$(\alpha^j)^2 = \beta^2 = 1, \tag{52}$$

$$\mathrm{Tr}(\alpha^j) = \mathrm{Tr}(\beta) = 0. \tag{53}$$

[5]Cliffordova algebra je dobila ime po William Kingdon Cliffordu koji ju je i razvio. Ova algebra ima široku primjenu u raznim oblastima geometrije i teorijske fizike. Povezana je sa kvadratičnim formama i ortogonalnim transformacijama, te generalizuje kompleksne brojeve.

Uvrstimo li Lorentz-invarijantan Hamiltonijan koji u sebi sadrži hermitske matrice α^j i β u Schrödingerovu talasnu jednačinu, imat ćemo da je:

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = (-i\hbar c\vec{\alpha}\cdot\vec{\nabla} + \beta mc^2)\Psi. \tag{54}$$

Slijedeći korak koji možemo uraditi jeste da pomnožimo ovako dobivenu jednačinu s lijeva sa matricom β.

$$i\hbar\beta\frac{\partial\Psi}{\partial t} = (-i\hbar c\beta\vec{\alpha}\cdot\vec{\nabla} + \beta^2 mc^2)\Psi, \tag{55}$$

gdje znamo da je $\beta^2 = 1$. Sada, radi jednostavnosti i funkcionalnosti, možemo uvesti nove 4×4 matrice, tzv. γ^μ matrice tako da je $\beta = \gamma^0$ hermitska matrica i $\beta\alpha^j = \gamma^j$ antihermitska matrica. γ^μ matrice su poznate i pod nazivom Diracove matrice. To je set od četiri matrice

$$\gamma^\mu = (\gamma^0, \gamma^1, \gamma^2, \gamma^3) \tag{56}$$

koje zadovoljavaju specifičnu antikomutacionu relaciju. Ova antikomutaciona relacija data je izrazom

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = \gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}1, \tag{57}$$

koji osigurava Cliffordovu algebru i to da je Diracova jednačina u skladu sa relacijom za energiju relativističke čestice

$$E^2 = \vec{p}^{\,2}c^2 + m^2c^4. \tag{58}$$

Validnost ove antikomutacione relacije možemo provjeriti ukoliko uvrstimo eksplicitne matrične izraze:

$$\gamma^0 = \beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \gamma^j = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^j \\ -\sigma^j & 0 \end{pmatrix}. \tag{59}$$

Iz ovih matrica razvidna je njihova bitna osobina da je njihov trag $\mathrm{Tr}[\gamma^\mu] = 0$, što im omogućava da budu koeficijenti u Diracovoj jednačini. Također, da bi ove matrice[6] osiguravale da je Hamiltonijan Diracovog polja hermitski operator, one zadovoljavaju i relaciju

$$\gamma_0\gamma_\mu\gamma_0 = {\gamma_\mu}^\dagger. \tag{60}$$

Naravno, postoje različite reprezentacije γ^μ matrica koje će nam poslužiti uviđanju različitih osobina Diracove funkcije, koja predstavlja rješenje Diracove jednačine. Reprezentacija o kojoj sam do sada govorila naziva se još

[6] Više o osobinama gamma-matrica u dodatku!

i *standardnom reprezentacijom* i njom se uglavnom koristimo. Pored toga, veoma je korisna i *Weylova reprezentacija* koja ima prednosti u proučavanju kiralnosti, kao što će i kasnije biti detaljno prezentovano.

Uvođenjem γ^μ matrica i prebacivanjem svih članova na lijevu stranu, dobivamo slijedeću jednačinu

$$i\hbar\gamma^0 \frac{\partial \Psi}{\partial t} + i\hbar c \gamma^j \cdot \vec{\nabla}\Psi - mc^2\Psi = 0. \tag{61}$$

Da dobijemo Diracovu jednačinu, moramo se pozvati na četvorokomponentnu notaciju u kojoj vrijedi da je četvorokomponentni gradijent

$$\partial_\mu = (\partial_0, \partial_j) = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \vec{\nabla}\right) \tag{62}$$

tako da je Diracova jednačina u konačnici u prirodnom sistemu jedinica data izrazom

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\Psi = 0. \tag{63}$$

Vidimo da je Diracova jednačina veoma kompleksna jer predstavlja sistem od četiri jednačine koje su međusobno povezane, tako da i samo rješenje ovakve jednačine mora biti nešto s čim se do sada nismo susretali.

Rješenje Diracove jednačine u standardnoj reprezentaciji γ matrica predstavlja još jedan novi matematički objekat kojeg je u fiziku uveo Dirac. Do sada smo vidjeli da je rješenje Schrödingerove jednačine funkcija koja ima jednu komponentu, tako da u slučaju Diracove jednačine u čiji sastav ulaze matrice dimenzija 4×4, rješenje mora biti talasna funkcija sa četiri kompleksne komponente. Ova talasna funkcija je poznatija pod nazivom *Diracov spinor* ili bispinor

$$\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \Psi_3 \\ \Psi_4 \end{pmatrix}. \tag{64}$$

Ona sadrži i rješenja sa pozitivnim i rješenja sa negativnim energijama

$$\Psi = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{2E}} \sum_r \left(b(p,r)\, e^{-ip\cdot x} + d^*(p,r)\, e^{ip\cdot x}\right), \tag{65}$$

gdje nam koeficijenti $b(p,r)$ i $d^*(p,r)$ daju vjerovatnoće da čestica ima pozitivnu, odnosno negativnu energiju.

3.1.1 Antičestice

Drugi problem kojeg je Dirac želio riješiti bila je pojava stanja sa negativnom energijom. Kada bismo ova stanja posmatrali sa pozicije klasične mehanike, mogli bi zaključiti da su ona nefizikalna i odbaciti ih kao takva, međutim, kvantna mehanika to ne dozvoljava. Potrebno je samo naći objašnjenje šta ova stanja zapravo predstavljaju.

Prvo Diracovo objašnjenje danas je poznato kao *teorija šupljina*. U ovoj teoriji Dirac je postulirao da su sva stanja sa negativnim energijama zauzeta, a stanja sa pozitivnim energijama slobodna, te da čestica sa pozitivnom energijom ne može preći u stanja sa negativnom energijom zbog Paulijevog principa isključivosti. Kada bi pobudili ovako definisani vakuum, elektron bi iz mora stanja sa negativnim energijama prešao u stanje sa pozitivnom energijom ostavljajući šupljinu iza sebe. Ovakav proces se naziva stvaranje (kreacija) para, a ukoliko bi se elektron vratio na svoje mjesto, anhilirao bi se sa šupljinom i emitovala bi se energija (anhilacija para).

Dirac je ovim objašnjenjem naišao na negodovanje mnogih naučnika, te je uvaživši njihove primjedbe i mišljenja predvidio postojanje antičestica. Kako je Dirac želio formulisati jednačinu koja bi opisivala kretanje elektrona prvobitno je predvidio postojanje njegovog antielektrona.

Elektron, kojeg danas poznajemo kao glavnog predstavnika fermiona, tačnije leptona, otkriven je 1897. godine od strane J. J. Thompsona u procesu koji se odvijao unutar katodne cijevi. Naime, u ovom eksperimentu, Thompson je zagrijavao katodu sa čije su se površine emitovali elektroni. Nakon emisije, emitovane elektrone usmjeravalo je električno i magnetno polje ka ekranu.

Znamo da je elektron e^- električki negativno naelektrisana čestica koja se nalazi u elektronskom omotaču atoma i da mu masa iznosi

$$m_e \approx 0,5\,\mathrm{MeV}. \tag{66}$$

Prema Diracu, antielektron ili pozitron, kako ga danas zovemo, ima iste osobine kao i sam elektron, tj. ima istu masu, istu energiju i nosi istu količinu električkog naelektrisanja, samo suprotnog predznaka.

Eksperimentalna potvrda Diracove jednačine i postojanja pozitrona došla je 2.8.1932. godine kada je Anderson pomoću magličaste komore našao pozitrone u kozmičkim zrakama. Eksperiment je izvršio tako što je pustio kozmičke zrake (koje čine 89% protoni, 10% α čestice i 1% čestice koje dolaze izvan Sunčevog sistema) da prođu kroz magličastu komoru okruženu magnetnim poljem koje je savijalo putanje čestica u različitim pravcima u zavisnosti od predznaka njihovog naelektrisanja. Na fotografskoj ploči su stoga ostajali jonizovani tragovi krivulja identičnih elektronskim, samo suprotnog smjera.

Ako mogu postojati pozitroni, onda postoje i antičestice svih drugih čestica. Antičestice se ujedinjuju u izgradnji antimaterije, kao što to rade čestice kada je u pitanju materija. Kao primjer možemo uzeti pozitron i antiproton koji ujedinjeni daju atom antihidrogena. Antihidrogen $\bar{\mathrm{H}}$ se počeo proizvoditi u akceleratorima 1995. godine, ali se veoma brzo anhilirao sa materijom, tako da je tek pet godina poslije atom antihidrogena po prvi put uspješno proučavan. Njegove prve osobine je izučio ALPHA (Antihydrogen Laser Physics Apparatus) tim iz CERN-a koji se nada da će na osnovu njih ustanoviti zašto imamo asimetričnost materije i antimaterije u svemiru, problem koji predstavlja jedan od najvećih izazova moderne fizike.

Interesantno je da postoje čestice koje su same sebi antičestice. To može biti samo odlika neutralnih čestica. Naprimjer, smatra se da bi neutrino mogao biti sam svoja antičestica, što ćemo vidjeti u kasnijem izlaganju.

Naravno, kada bi sjedinili materiju i antimateriju, došlo bi do njihove anhilacije pri čemu se stvaraju fotoni. Dakle, kada dođe do sudara čestice i antičestice, one se anhiliraju. To možemo vidjeti na primjeru sudara elektrona i pozitrona

$$e^- + e^+ \to 2\gamma, \tag{67}$$

iz kojeg vidimo da kada sudarimo elektron i pozitron nastaju dva fotona, što mi u fizici nazivamo čistom energijom. Zbog ove anhilacije pozitrone čuvamo u vakuumu pomoću elektromagnetnog polja.

Radi predviđanja postojanja antičestica, Dirac je zajedno sa Schrödingerom 1933. godine dobio Nobelovu nagradu za fiziku za otkrića novih oblika atomske teorije.

Kada smo definisali talasne četvorokomponente funkcije čestica, potrebno je uvesti i talasne funkcije za antičestice, čije je postojanje Dirac predvidio svojom jednačinom. Znamo da antičestice imaju istu masu i energiju kao čestica, ali su suprotnog predznaka naboja, što znači da moramo obratiti pažnju na naboj u izvođenju ovih talasnih funkcija.

Način na koji će naboj čestice doći do izražaja jeste interakcija te čestice sa elektromagnetnim poljem kojeg opisuje četvorovektor potencijala

$$A^\mu = (A^0, \vec{A}), \tag{68}$$

gdje je A^0 skalarni, a $\vec{A}$ vektorski potencijal.

Interakciju čestice naboja q i elektromagnetnog polja uvest ćemo pomoću tzv. *minimalne veze*, koja se ostvaruje zamjenom

$$\hat{p}^\mu \to \hat{p}^\mu - qA^\mu. \tag{69}$$

Tada će Diracova jednačina

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\Psi = 0 \tag{70}$$

za negativan električni naboj $q = -|q|$, poprimiti oblik:

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu + |q|\gamma^\mu A_\mu - m)\Psi = 0. \tag{71}$$

Uvodeći minimalnu vezu, da dobijemo jednačinu koju će zadovoljavati antičestice, koristimo se diskretnom simetrijom konjugacije naboja.

Prvi zadatak je kompleksno-konjugovanje Diracove jednačine kojim dobivamo da je

$$[(i\partial_\mu - |q|A_\mu)\gamma^{\mu *} - m]\Psi^* = 0, \tag{72}$$

gdje je

$$(i\partial_\mu)^* = -i\partial_\mu \qquad \text{i} \qquad (A^\mu)^* = A^\mu. \tag{73}$$

Ako postoji nesingularna matrica $C\gamma^0$ takva da zadovoljava jednačinu

$$C\gamma^0\gamma^{\mu *}(C\gamma^0)^{-1} = -\gamma^\mu, \tag{74}$$

tada ćemo imati da je

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - |q|\gamma^\mu A_\mu - m)C\gamma^0\Psi^* = 0. \tag{75}$$

Četvorodimenzionalni spinor antičestica bi bio dat preko relacije:

$$\Psi_c = C\gamma^0\Psi^*, \tag{76}$$

gdje je $C\gamma^0$ jednaka

$$C\gamma^0 = \gamma^2. \tag{77}$$

Talasna funkcija antičestica je data relacijom:

$$\Psi_c = \gamma^2\Psi^*. \tag{78}$$

Dakle, konjugacija naboja je diskretna transformacija uz pomoć koje smo dobili eksplicitno talasnu funkciju antičestice Ψ_c izraženu pomoću talasne funkcije Ψ čestice. Vidjeli smo da one zadovoljavaju Diracovu jednačinu:

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu + |q|\gamma^\mu A_\mu - m)\Psi = 0, \tag{79}$$

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - |q|\gamma^\mu A_\mu - m)\Psi_c = 0, \tag{80}$$

što znači da se čestica i antičestica stvarno razlikuju samo u predznaku naboja.

3.1.2 Spin

Potrebno je obratiti pažnju na način na koji je Dirac uveo spin u svoju jednačinu, kao neophodni element, i kako mi danas znamo da Diracova jednačina opisuje čestice spina 1/2.

Potreba za uvođenjem spina, unutrašnjeg ugaonog momenta, javila se nakon izvođenja Stern-Gerlachovog eksperimenta. U ovom eksperimentu, izvedenom 1922. godine od strane dva naučnika Otto Sterna i Walther Gerlacha snop atoma srebra se prolaskom kroz nehomogeno magnetno polje cijepao na dva dijela, gore i dolje jednako udaljena od početnog pravca. Razlog za ovo razdvajanje je upravo kvantni efekat, poznat kao unutrašnji ugaoni momenat atoma, tj. spin. Spin je nepromjenjiv i predstavlja osobinu svih elementarnih čestica.

Kako su elektroni čestice koje imaju spin 1/2, snop elektrona se također razdvaja na dva dijela, te iz toga zaključujemo da elektroni mogu imati projekciju spina $-\frac{\hbar}{2}$ ili $\frac{\hbar}{2}$ duž date ose.

Wolfgang Pauli je formulisao teoriju spina 1927. godine koristeći se kvantnom mehanikom. U ovoj teoriji, s ciljem da objasni spin, uveo je dvokomponentne talasne funkcije (spinore), korekcije na Hamiltonijan i poznate Paulijeve matrice dimenzija 2×2.

Međutim, Paulijeva teorija je bila nerelativistička, tako da ju je za relativistički slučaj razvio sam Dirac. Dirac je shvatio da je spin posljedica spoja kvantne mehanike i specijalne teorije relativiteta i umjesto dvokomponentnih uveo je četvorokomponentne talasne funkcije.

Uzmemo li nerelativistički limes za Diracovu jednačinu, dobit ćemo Paulijevu jednačinu iz čega možemo zaključiti da Diracova jednačina opisuje čestice spina 1/2.

3.2 Diracovo polje i kvantizacija Diracovog polja

Kao i u slučaju Klein-Gordonove jednačine, znamo da je kvantna teorija polja višečestična teorija, tako da moramo uvesti Diracovo polje umjesto talasnih funkcija. Samim tim, Diracova jednačina opisuje čestice spina 1/2, odnosno fermione. Oni se podvrgavaju Fermi-Diracovoj statistici jer poštuju Paulijev princip isključivosti. Naime, stanje sa dva fermiona mora biti antisimetrično u odnosu na njihovu zamjenu. To znači da ne možemo staviti dva elektrona sa istim kvantnim brojevima na isti energetski nivo. Diracova jednačina za Diracovo polje $\Psi(\vec{x},t)$ glasi

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\Psi(\vec{x},t) = 0. \tag{81}$$

Kako $\Psi^\dagger\Psi$ nije Lorentz-invarijantno, a nama je potrebno da teorija zadovoljava ovaj uslov, uvodimo i adjungovano Diracovo polje,

$$\bar{\Psi} = \Psi^\dagger \gamma^0, \tag{82}$$

pri čemu je

$$\Psi^\dagger = \begin{pmatrix} \Psi_1^* & \Psi_2^* & \Psi_3^* & \Psi_4^* \end{pmatrix}. \tag{83}$$

Obzirom da se fermioni, koje opisuje Diracova jednačina, podvrgavaju Paulijevom principu isključenja i Fermi-Diracovoj statistici, kvantizacija četvorokomponentnog polja $\Psi(\vec{x},t)$ se odvija prema drugačijim pravilima od prethodno posmatranog Klein-Gordonovog polja.

Prvo što moramo uraditi jeste da Diracova polja $\Psi(\vec{x},t)$ i $\Psi^\dagger(\vec{x},t)$ zamijenimo sa operatorima tih polja

$$\hat{\Psi}(\vec{x},t), \tag{84}$$

odnosno

$$\hat{\Psi}^\dagger(\vec{x},t), \tag{85}$$

koji zadovoljavaju *Jordan-Weignerova* pravila kvantizacije, tj. za njih vrijede antikomutacione relacije

$$\{\hat{\Psi}_\alpha(\vec{x},t), \hat{\Psi}^\dagger_\beta(\vec{x}\,',t)\} = \delta_{\alpha\beta}\ \delta^3(\vec{x}-\vec{x}'), \tag{86}$$

$$\{\hat{\Psi}_\alpha(\vec{x},t), \hat{\Psi}_\beta(\vec{x}\,',t)\} = \{\hat{\Psi}^\dagger_\alpha(\vec{x},t), \hat{\Psi}^\dagger_\beta(\vec{x}\,',t)\} = 0, \tag{87}$$

gdje je antikomutator dva kvantna operatora $\hat{A}$ i $\hat{B}$ dat sa

$$\{\hat{A},\hat{B}\} = \hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A}. \tag{88}$$

Diracova polja, razvijena po ravnim talasima, glase

$$\hat{\Psi}(\vec{x},t) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{2E}} \sum_s (\hat{b}(p,s)u(p,s)\ e^{-ip\cdot x} + \hat{d}^\dagger(p,s)v(p,s)\ e^{ip\cdot x})$$

$$\hat{\Psi}^+(\vec{x},t) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{2E}} \sum_s (\hat{b}(p,s)u^\dagger(p,s)\ e^{-ip\cdot x} + \hat{d}^\dagger(p,s)v^\dagger(p,s)\ e^{ip\cdot x})$$

gdje su $u(p,s)$ i $v(p,s)$ spinori, pri čemu spin ima vrijednosti $\pm\frac{1}{2}$ i može biti usmjeren prema gore ili prema dolje.

Ovi spinori zadovoljavaju relacije ortogonalnosti

$$u^\dagger(p,s)u(p',s') = v^\dagger(p,s)v(p',s') = \frac{E}{m}\ \delta_{ss'}. \tag{89}$$

Operatori $\hat{b}$ i $\hat{b}^\dagger$ su operatori poništavanja i stvaranja čestice, a $\hat{d}$ i $\hat{d}^\dagger$ operatori poništavanja i stvaranja antičestice. Ovi operatori zadovoljavaju antikomutacione relacije

$$\{\hat{b}^\dagger(p,s), \hat{b}^\dagger(p',s')\} = 0,$$

tj. imamo da je

$$\hat{b}^\dagger(p,s)\ \hat{b}^\dagger(p,s) = 0,$$

pa ne možemo imati dva elektrona sa istim kvantnim brojevima, kao što nalaže Paulijev princip isključivosti.

Prema svemu do sada rečenom, Hamiltonijan Diracovog polja postaje

$$H = \int d^3p \sum_s\ E(\hat{b}^\dagger\hat{b} + \hat{d}^\dagger\hat{d}), \tag{90}$$

čime je osigurano da je energija pozitivno definitna veličina. Da smo koristili komutacione relacije za kvantizaciju Diracovog polja, naišli bismo na problem. Naime, kako bi tada Hamiltonijan glasio

$$H = \int d^3p \sum_s\ E(\hat{b}^\dagger\hat{b} - \hat{d}^\dagger\hat{d}), \tag{91}$$

vidimo da bi sa porastom broja antičestica energija sistema bivala negativna.

3.3 Diracovo polje i Lorentzove transformacije

Specijalna teorija relativiteta izgrađena je na dva principa: princip konstantnosti brzine svjetlosti i princip relativiteta. Princip relativiteta nam kaže da se svi fizikalni procesi u inercijalnim sistemima odvijaju na isti način, tako da prelaz iz jednog sistema u drugi vršimo putem Lorentzovih transformacija. Zbog ovog principa, Dirac je formulisao jednačinu za spin 1/2 čestice tako da je ona Lorentz invarijantna, odnosno ne mijenja svoj oblik pri ovim transformacijama. Kako je invarijantnost u odnosu na Lorentzove transformacije jedna od najvažnijih simetrija svih fizikalnih sistema, veoma je bitno razmotriti šta Lorentzove transformacije[7] predstavljaju na jeziku teorije grupa.

Sa stanovišta teorije grupa, Lorentzove transformacije čine *Lorentzovu grupu* $SO(3,1)$ koja se sastoji od grupe rotacija $SO(3)$ u trodimenzionalnom prostoru i boostova.

Grupa $SO(3,1)$ ima ukupno šest generatora, od kojih generatori J_i, $i = 1,2,3$, predstavljaju rotacije oko x, y i z-ose, respektivno; a generatori K_i

[7] Detaljne karakteristike ove grupe izložene su u dodatku o Lorentzovim transformacijama.

boostove duž ovih osa. Dakle, možemo zaključiti da rotacije ne utječu na vrijeme, nego samo na prostorne koordinate. Zbog toga se u generatorima rotacija u prvoj koloni i prvom redu pojavljuju samo nule. Kako znamo trodimenzionalnu reprezentaciju generatora $SO(3)$ grupe, kao i njezinu Lievu algebru,

$$[J_i, J_j] = i\varepsilon_{ijk} J_k, \tag{92}$$

za generatore unutar grupe $SO(3,1)$ možemo pisati:

$$J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix} \quad J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad J_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{93}$$

Kada su u pitanju boostovi, tj. transformacije kojima vršimo prelazak sa jednog inercijalnog koordinatnog sistema na drugi duž x, y ili z-ose, imamo također tri generatora. Uzmimo, naprimjer, boost duž x-ose, generisat će se transformacije

$$x^{0'} = \gamma(x^0 - \beta x^1), \tag{94}$$

$$x^{1'} = \gamma(x^1 - \beta x^0), \tag{95}$$

$$x^{2'} = x^2, \tag{96}$$

$$x^{3'} = x^3, \tag{97}$$

koje možemo napisati i u kompaktnijoj matričnoj formi. U slučaju boosta duž x-ose vrijedi

$$\begin{pmatrix} x^{0'} \\ x^{1'} \\ x^{2'} \\ x^{3'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}. \tag{98}$$

Analogno možemo napisati i Lorentzove transformacije i za slučaj boosta duž y-ose i z-ose (koje sam eksplicitno napisala u dodatku o Lorentzovim transformacijama). Uvedemo li novi parametar θ, tako da je

$$e^{\theta} = \gamma(1+\beta) \qquad \text{i} \qquad e^{-\theta} = \gamma(1-\beta), \tag{99}$$

imat ćemo da je $\gamma = \cosh\theta$ i $\beta = \tanh\theta$, odnosno relacija za boost duž x-ose će dati

$$B_1(\theta) = \begin{pmatrix} \cosh\theta & \sinh\theta & 0 & 0 \\ \sinh\theta & \cosh\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{100}$$

Tada generator pridružen boostu duž x-ose dobivamo pomoću relacije

$$T_1 = -i\frac{\partial}{\partial\theta}B_1(\theta)|_{\theta=0}, \tag{101}$$

pa je

$$T_1 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{102}$$

Analogno dobivamo i preostala dva generatora boosta:

$$T_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad T_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{103}$$

Svi navedeni generatori Lorentzove grupe zadovoljavaju tri veoma bitne komutacione relacije. Prva komutaciona relacija se odnosi na dvije rotacije koje u konačnici opet daju rotaciju. Već znamo da je:

$$[J_i, J_j] = i\varepsilon_{ijk}J_k. \tag{104}$$

Druga komutaciona relacija koju je lako provjeriti glasi

$$[J_i, T_j] = i\varepsilon_{ijk}T_k, \tag{105}$$

i ona nam govori da rotacija i boost daju boost, te da se generatori T_i transformišu kao trodimenzionalni vektori u odnosu na rotacije.

Na kraju, treća komutaciona relacija pokazuje da dva boosta u konačnici daju rotaciju, što je neočekivani rezultat,

$$[T_i, T_j] = i\varepsilon_{ijk}J_k. \tag{106}$$

Kod rotacija smo vidjeli da kada neki sistem rotiramo za ugao od 2π on će se vratiti u konačnici u svoje početno stanje, međutim, to ne vrijedi za slučaj boostova.

3.3.1 Reprezentacije grupe $SO(3,1)$

Posmatrana reprezentacija Lorentzove grupe $SO(3,1)$ je reducibilna reprezentacija koju možemo razložiti na direktnu sumu dvije ireducibilne $SU(2)$ reprezentacije. Ovo je veoma bitna karakteristika $SO(3,1)$ grupe koja je važna za shvatanje veze između Weyl, Majorana i Diracovih fermiona koje izučavam u svom radu. Ovoj ću karakteristici prvo pristupiti sa stanovišta teorije grupa, a u kasnijem ću izlaganju objasniti njen fizikalni smisao.

Razlaganje grupe $SO(3,1)$ vršimo tako što uvodimo dva nova skupa generatora J_{+i} i J_{-i}, gdje $i = 1, 2, 3$, koji predstavljaju generatore ove dvije različite $SU(2)$ grupe na slijedeći način

$$J_{\pm\ i} = \frac{1}{2}\,(J_i \pm\ K_i). \tag{107}$$

Treba primijetiti da J_{+i} i J_{-i} zadovoljavaju korektnu Lievu algebru da budu generatori $SU(2)$ grupe. Zbog toga se može napisati da je $SO(3,1) = SU(2) \times SU(2)$. Kako se svaka $SU(2)$ reprezentacija može na jednoznačan način predstaviti indeksom j, gdje je $j = 0, 1/2, 1, ...$ tako se i svaka reprezentacija grupe $SO(3,1)$ može označiti kao uređeni par $(j^{\pm})$, gdje su $j^{\pm} = 0, 1/2, 1, ...$. Dakle, reprezentacije grupe $SO(3,1)$ mogu biti:

$$(0,0), (1/2,0), (0,1/2), (1/2.1/2), (1,0), ... \tag{108}$$

Sve ove reprezentacije su *spinske reprezentacije* i opisuju različite čestice sa različitim spinovima. Prva reprezentacija $(0,0)$ je trivijalna jednodimenzionalna reprezentacija koju nećemo razmatrati i koja odgovara skalarnoj čestici spina 0. Nama će biti važne tri reprezentacije grupe $SO(3,1)$:

$$(1/2,0), (0,1/2), (1/2,1/2). \tag{109}$$

Reprezentacije $(1/2,0), (0,1/2)$ su dvodimenzionalne reprezentacije i zovu se *Weylove reprezentacije*. One nam u kvantnoj teoriji polja služe za opisivanje tzv. Weylovih fermiona, što će biti dalje objašnjeno, neutralnih čestica bez mase sa spinom $1/2$.

U nastavku ćemo označiti grupe $SU(2)$ sa dodatnim indeksom L i R. Dakle, iz navedenih reprezentacija grupe $SO(3,1)$ vidimo da imamo dvije Weylove spinorske reprezentacije, odnosno dva Weylova fermiona opisana pomoću dvodimenzionalnih Weylovih polja ψ_L koje se transformiše kao $(1/2,0)$ i ψ_R koje se transformiše kao $(0,1/2)$. Prva Weylova reprezentacija će opisivati fermion bez mase spina $1/2$ koji se transformiše netrivijalno u odnosu na prvu od dvije $SU(2)_L$ grupe, a druga će se, naravno, transformirati u odnosu na drugu $SU(2)_R$ grupu u datoj dekompoziciji.

Prva $SU(2)$ grupa tako djeluje na dvodimenzionalni Weylov spinor ψ_L, $(1/2,0)$, pri čemu vrijedi da je:

$$J_i = \frac{1}{2}\sigma_i \quad iK_i = \frac{1}{2}\sigma_i, \tag{110}$$

dok, s druge strane, druga $SU(2)$ reprezentacija djeluje na spinor ψ_R, $(0, 1/2)$, pri čemu vrijedi da je:

$$J_i = \frac{1}{2}\sigma_i \quad iK_i = -\frac{1}{2}\sigma_i. \tag{111}$$

Za opisivanje elektrona, koji ima dva stepena slobode, služi nam objekt koji se transformiše u odnosu na reprezentaciju $(1/2, 1/2)$ Lorentzove grupe. Radi se o četvorodimenzionalnoj reprezentaciji jer djeluje na četvorodimenzionalni Diracov spinor:

$$\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \Psi_3 \\ \Psi_4 \end{pmatrix}. \tag{112}$$

Razlog što Diracov spinor ima četiri dimenzije jeste *parnost*. U odnosu na parnost

$$\vec{x} \to -\vec{x} \;\; i \;\; \vec{p} \to -\vec{p}, \tag{113}$$

slijedi da i

$$\vec{J} \to \vec{J} \;\; i \;\; \vec{K} \to -\vec{K}, \tag{114}$$

što znači da

$$\vec{J_+} \leftrightarrow \vec{J_-}, \tag{115}$$

odnosno da parnost šalje $(1/2, 0)$ u $(0, 1/2)$ i obratno. Kako smo već uveli Weylove spinore ψ_L i ψ_R, vidimo da parnost šalje Weylov spinor sa indeksom L u Weylov spinor sa indeksom R i obratno. Ovo je veoma bitan zaključak, čije će značenje biti u potpunosti jasno u slijedećem poglavlju, kada definišemo šta ustvari znače ovi indeksi L i R. Za sada možemo zaključiti na osnovu djelovanja parnosti da nam za opis elektrona trebaju obje ove dvodimenzionalne reprezentacije, i ψ_L, $(1/2, 0)$, i ψ_R, $(0, 1/2)$. Dakle, četvorodimenzionalna reprezentacija je reducibilna reprezentacija koja je direktna suma ove dvije ireducibilne reprezentacije. Ovim smo dobili da četvorodimenzionalni Diracov spinor možemo predstaviti preko dva Weylova spinora u obliku

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix}. \tag{116}$$

Još jednom treba naglasiti da Ψ ima četiri stepena slobode, dok elektron ima dva stepena slobode koja odgovaraju mogućim projekcijama spina. Zbog toga je potrebno ukloniti dva stepena slobode iz datog Diracovog spinora. To ćemo uraditi tako što ćemo preći u impulsni prostor

$$\Psi(x) = \int [d^4p/(2\pi)^4] e^{-ipx} \Psi(p), \tag{117}$$

u kojem Diracova jednačina poprima oblik

$$(\gamma^\mu p_\mu - m)\Psi(p) = 0. \tag{118}$$

Posebno nas zanima sistem mirovanja $p_r = (m, \vec{0})$ u kojem imamo $\Psi(p_r)$ (indeks r nam označava sistem mirovanja, rest-eng.). Stoga, Diracova jednačina poprima slijedeći oblik

$$(\gamma^0 - 1)\Psi(p_r) = 0, \tag{119}$$

gdje ćemo matricu γ^0 uzeti u Diracovoj bazi

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{120}$$

Kako je $(\gamma^0 - 1)^2 = -2(\gamma^0 - 1)$, što je karakteristika projekcionih operatora $P^2 = P$, mi $(\gamma^0 - 1)$ smatramo također projekcionim operatorom. Uvrstimo li eksplicitne izraze, slijedi da je Diracova jednačina

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Psi = 0, \tag{121}$$

projekcija koja se rješava neželjenih stepena slobode. Ovako napisana nam govori da su dvije od četiri komponente Ψ jednake nuli. Kada smo se riješili stepena slobode koji su bili višak možemo doći do veoma bitne konstatacije koja glasi da je za dobivanje Diracove jednačine za bilo koju vrijednost impulsa dovoljno izvršiti boost. To ćemo uraditi tako što ćemo boostirati $\Psi(p_r)$

$$\Psi(p) = e^{-i\vec{\phi}\vec{T}}\Psi(p_r), \tag{122}$$

odnosno

$$(e^{-i\vec{\phi}\vec{T}}\gamma^0 e^{i\vec{\phi}\vec{T}} - 1)\Psi(p) = 0. \tag{123}$$

Uzmemo li smjenu da je $e^{-i\vec{\phi}\vec{T}}\gamma^0 e^{i\vec{\phi}\vec{T}} = \gamma^\mu p_\mu/m$, dobivamo Diracovu jednačinu za proizvoljni impuls

$$(\gamma^\mu p_\mu - m)\Psi(p) = 0. \tag{124}$$

Prema tome, Diracova jednačina je boostirana projekcija u proizvoljni sistem koja se rješava neželjenih stepena slobode.

3.4 Lijevo ili desno?

U prethodnoj sekciji uvela sam notaciju koja uključuje indekse L i R. Ideja je da ψ_L i ψ_R odgovaraju fermionskim komponentama koje su ljevoruke

(L left) i desnoruke (R right), respektivno. Naravno, postavlja se pitanje šta je to lijevo, a šta je to desno. Na ovo pitanje možemo odgovoriti tek kada uvedemo dva fizikalna pojma poznata pod nazivima helicitet i kiralnost.

Helicitet je relativna orijentacija impulsa i ugaonog momenta čestice $\vec{J}$. Za česticu sa impulsom $\vec{p}$, helicitet je matematički formulisan kao

$$h_{\vec{p}} = \frac{2\vec{J}\cdot\vec{p}}{p}, \tag{125}$$

gdje $p = |\vec{p}|$, a faktor 2 nam služi da vlastite vrijednosti heliciteta budu cjelobrojne za svaku česticu. Kako je orbitalni dio ugaonog momenta $\vec{L} = \vec{r}\times\vec{p}$ ortogonalan u odnosu na impuls čestice $\vec{p}$, on ne doprinosi ovoj orijentaciji, tako da imamo samo spinsku komponentu. Zbog toga možemo reći da je helicitet projekcija spina na impuls datog fermiona. Matematički formulisano helicitet

$$h_{\vec{p}} = \frac{\vec{\Sigma}\cdot\vec{p}}{p}, \tag{126}$$

gdje je $\frac{1}{2}\,\vec{\Sigma}$ matrica koja odgovara operatoru spina. Ove matrice su date relacijom $\Sigma^i = \frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}\sigma_{jk}$. Vlastite vrijednosti heliciteta su

$$h = \pm 1. \tag{127}$$

Konvencija je takva da za $h = +1$ kažemo da je fermion desnoruk, odnosno da ima desni helicitet, a za $h = -1$ da je fermion ljevoruk, odnosno da ima lijevi helicitet. Ovo je važno, kao što ćemo vidjeti, jer postoje lijeva i desna kiralnost.

Kiralnost, s druge strane, (grč. *chiros* znači ruka) ima vezu sa γ^5 matricom[8]. Ova matrica antikomutira sa svim γ^μ matricama sa kojima smo se već upoznali. Naime, vrijedi da je

$$\{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0. \tag{128}$$

Osim toga, za ovu matricu vrijedi da je $(\gamma^5)^2 = 1$, gdje je 1 jedinična matrica dimenzije 4×4. Ovu matricu možemo predstaviti u različitim bazama u zavisnosti od fizikalnog problema kojeg želimo razmatrati. Naprimjer, ako posmatramo spore elektrone, pokazuje se da je pogodno koristiti Diracovu bazu u kojoj je ova matrica data kao

$$\gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{129}$$

[8] Pogledati osobine ove matrice u dodatku.

Za razmatranje pitanja kiralnosti koristit ćemo se Weylovom bazom koju još nazivaju i kiralnom bazom. U njoj je matrica γ^5 u blok-dijagonalnoj formi

$$\gamma^5 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{130}$$

što znači da ima nule na sporednoj dijagonali.

Veza kiralnosti i γ^5 matrice uspostavljena je pomoću dvije projekcione matrice — P_L i P_R — koje djeluju na fermionska polja i spinore. One su date kao

$$P_L = \frac{1}{2}\,(1+\gamma^5), \tag{131}$$

$$P_R = \frac{1}{2}\,(1-\gamma^5), \tag{132}$$

pri čemu je $P_L + P_R = 1$, a predznak $\pm$ zavisi od baze koju koristimo za opis γ^5 matrice. Predznaci u ovim relacijama, dakle, vrijede za Weylovu bazu. Ove projekcione matrice imaju veoma bitnu karakteristiku. Uzmimo, naprimjer, prvu projekcionu matricu P_L. Za nju vrijedi da je

$$(P_L)^2 = P_L P_L = \frac{(1+\gamma^5)^2}{4} = \frac{1+2\gamma^5+(\gamma^5)^2}{4} = \frac{2+2\gamma^5}{4} = P_L. \tag{133}$$

Analogno možemo dokazati da i za drugu projekcionu matricu vrijedi da je $(P_R)^2 = P_R$. Ova osobina je karakteristična za sve projekcione operatore, pa P_L i P_R zovemo projekcionim operatorima. Treba primijetiti da ti operatori nemaju inverznu formu, što vrijedi inače za svaki projekcioni operator. Pod njihovim djelovanjem svaki spinor koji zadovoljava Diracovu jednačinu cijepa se na dva kiralna dijela

$$\Psi = \Psi_L + \Psi_R = P_L\Psi + P_R\Psi, \tag{134}$$

od kojih je svaki, naravno, 4×1 objekat. To se vidi ako na Diracov četvorokomponentni spinor Ψ predstavljen preko Weylovih dvokomponentnih spinora ψ_L i ψ_R

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix}, \tag{135}$$

djelujemo projekcionim matricama P_L i P_R. Tada imamo da je

$$P_L\Psi = \Psi_L = \frac{1}{2}(1+\gamma^5)\Psi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_L \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{136}$$

i

$$P_R\Psi = \Psi_R = \frac{1}{2}(1-\gamma^5)\Psi = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \psi_R \end{pmatrix}. \tag{137}$$

Možemo zaključiti da je Diracovo polje projektovano na takozvane ljevoruke, odnosno desnoruke kiralne komponente

$$\Psi = \Psi_L + \Psi_R. \tag{138}$$

Veoma je važno vidjeti kako gustoća Lagranžijana izgleda napisana preko ljevorukih i desnorukih kiralnih komponenti Ψ_L i Ψ_R. Znamo da je Lagranžijan Diracovog polja dat relacijom

$$L = \bar{\Psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\Psi, \qquad \mu = 0, 1, 2, 3. \tag{139}$$

Prvo ćemo posmatrati maseni član $m\bar{\Psi}\Psi$. Uzmemo li u obzir sve osobine projekcionih matrica P_L i P_R možemo pisati da je

$$m\bar{\Psi}\Psi = m\bar{\Psi}(P_L + P_R)\Psi = m\bar{\Psi}((P_L)^2 + (P_R)^2)\Psi = m\bar{\Psi}P_L\Psi_L + m\bar{\Psi}P_R\Psi_R. \tag{140}$$

Zanima nas šta je $\bar{\Psi}P_L$ i $\bar{\Psi}P_R$.

$$\bar{\Psi}P_L = \Psi^+\gamma^0 P_L = \Psi^+\gamma^0\frac{1+\gamma^5}{2} = \Psi^+\frac{1-\gamma^5}{2}\gamma^0 = \Psi^+ P_R\gamma^0, \tag{141}$$

$$\bar{\Psi}P_R = \Psi^+\gamma^0 P_R = \Psi^+\gamma^0\frac{1-\gamma^5}{2} = \Psi^+\frac{1+\gamma^5}{2}\gamma^0 = \Psi^+ P_L\gamma^0. \tag{142}$$

Kada uvrstimo dobivene izraze, imamo

$$m\bar{\Psi}\Psi = m\Psi^+ P_R\gamma^0\Psi_L + m\Psi^+ P_L\gamma^0\Psi_R, \tag{143}$$

te iskoristimo li relaciju $\Psi^+ P = (P\Psi)^+$ za bilo koji projekcioni operator P, slijedi da je

$$m\bar{\Psi}\Psi = m(P_R\Psi)^+\gamma^0\Psi_L + m(P_L\Psi)^+\gamma^0\Psi_R = m(\Psi_R)^+\gamma^0\Psi_L + m(\Psi_L)^+\gamma^0\Psi_R. \tag{144}$$

U konačnici dobivamo da je maseni član

$$m\bar{\Psi}\Psi = m\bar{\Psi}_R\Psi_L + m\bar{\Psi}_L\Psi_R \tag{145}$$

taj koji miješa ljevoruke i desnoruke kiralne komponente, što će biti od izuzetne važnosti kada budem govorila o tome kako pojedini fermioni dobivaju masu.

S druge strane, drugi dio gustoće Lagranžijana, koristeći se istim matematičkim aparatima preko kiralnih komponenti je prezentovan kao

$$\bar{\Psi}i\gamma^0\partial_\mu\Psi = \bar{\Psi}_L i\gamma^\mu\partial_\mu\Psi_L + \bar{\Psi}_R i\gamma^\mu\partial_\mu\Psi_R, \tag{146}$$

gdje vidimo da on ne miješa ljevoruke i desnoruke kiralne komponente Diracovog spinora. Ovaj kinetički član samo spaja ljevoruke sa ljevorukim kiralnim komponentama, odnosno desnoruke sa desnorukim.

Nakon što sam uvela pojmove heliciteta i kiralnosti, mogu ih sada primijeniti na slučaj masivnih Diracovih fermiona i Weylovih fermiona bez mase.

3.4.1 Fermioni sa masom

U ovom odjeljku zanimaju nas dvije stvari. Prvo nas zanima Lorentz invarijantnost heliciteta i kiralnosti fermiona sa masom, kao i njihova očuvanost u vremenu. Na osnovu ovih karakteristika moći ćemo zaključiti da li su ove fizikalne veličine doista pogodne za opisivanje masivnih fermiona.

Posmatrajmo prvo kiralnost. Vidjeli smo da se Lorentzove transformacije sastoje od rotacija i boosta i da imaju ukupno šest generatora koji ih opisuju. U kompaktnoj formi, Lorentzove transformacije Diracovog spinora Ψ možemo napisati kao

$$\Psi \to \Lambda^\mu_\nu \Psi \tag{147}$$

gdje je Λ^μ_ν matrica transformacije dimenzija 4×4 ($\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$). Ona predstavlja transformaciju

$$\Lambda^\mu_\nu = e^{\theta_{\mu\nu}\Sigma^{\mu\nu}}, \tag{148}$$

gdje su $\Sigma^{\mu\nu}$ generatori Lorentzovih transformacija. Njihova matematička formulacija je data relacijom

$$\Sigma^{\mu\nu} = \frac{1}{4i}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]. \tag{149}$$

Kako je komutator $\frac{i}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu] = \sigma^{\mu\nu}$, slijedi da generatori Lorentzovih transformacija mogu biti

$$\Sigma^{ij} = \frac{1}{2}\varepsilon^{ijk} \begin{pmatrix} \sigma^k & 0 \\ 0 & \sigma^k \end{pmatrix} \tag{150}$$

generatori rotacija, i

$$\Sigma^{0i} = \frac{1}{2i} \begin{pmatrix} -\sigma^i & 0 \\ 0 & \sigma^i \end{pmatrix} \tag{151}$$

generatori boosta, pri čemu su σ^i, $i = 1, 2, 3$ Paulijeve matrice dimenzija 2×2. Kako je generator Lorentzovih transformacija proporcionalan proizvodu dvije gamma matrice, γ^5 komutira sa njima

$$[\gamma^5, \sigma^{\mu\nu}] = 0, \tag{152}$$

tako da je kiralnost Lorentz invarijantna. Međutim, kiralnost nije očuvana u vremenu, jer matrica γ^5 ne komutira sa masenim dijelom Hamiltonijana $H = \gamma^0(\gamma^i p^i + m)$ koji sadrži samo jednu gamma matricu. To naprosto znači da ako inicijalno stanje odgovara masivnom ljevorukom fermionu, to stanje će nakon nekog vremena razviti desnoruku komponentu. Kao što smo vidjeli, maseni član je glavni i odgovorni član za miješanje ljevorukih i desnorukih komponenti što daje masu fermionima.

S druge strane, helicitet je očuvan u vremenu jer on komutira sa Hamiltonijanom ove čestice. Međutim, on nije Lorentz invarijantan. Očuvan je pod rotacijama, ali nije invarijantan u odnosu na boostove. Naime, ako uzmemo česticu heliciteta $+1$ i impulsa usmjerenog duž x-ose, uvijek možemo naći posmatrača u drugom sistemu referencije koji se isto kreće duž x-ose, ali brzinom većom od našeg fermiona. Tako da će se za njega masivni fermion kretati u suprotnom smjeru. Odnosno, za tog posmatrača helicitet masivnog fermiona će imati vrijednost -1. Dakle, za fermione sa masom ne možemo odrediti da li je ljevoruk ili desnoruk prema helicitetu, jer helicitet zavisi od posmatrača.

Zbog ovih osobina kiralnosti i heliciteta niti jedna od ovih veličina nije savršeno prilagođena za opisivanje fermiona sa masom.

3.4.2 Fermioni bez mase

S druge strane, u slučaju fermiona bez mase koji se kreću brzinom svjetlosti imamo drugačiju situaciju. Helicitet je sada i Lorentz-invarijantan i očuvan u vremenu jer ne samo da ne možemo naći referentni sistem koji se kreće brže od našeg fermiona bez mase, tj. brže od svjetlosti u vakuumu, nego ne možemo ni otići u referentni sistem u kojem taj fermion miruje.

Također, i kiralnost postaje očuvana u vremenu, jer u Hamiltonijanu ovakve čestice nema člana sa masom, tako da operator kiralnost u potpunosti komutira s njim. Naravno, kiralnost je i dalje je Lorentz-inavrijantna.

Za fermione bez mase možemo slobodno govoriti o fermionima sa pozitivnim (negativnim) helicitetom i lijevim (desnim) kiralnostima, jer su za bezmasivne fermione kiralnost i helicitet jedna te ista stvar.

Kako bezmasivne fermione opisuje Weylovo polje, vidimo da su helicitet i kiralnost dobro definisane veličine za njega.

3.5 Neutrino

Prije nego što posvetim pažnju Weylovim fermionima bez mase, koje sam počela uvoditi u svoj rad u prethodnim sekcijama, željela bih obraditi pitanje neutrina.

Pored elektrona, za koje smo ustanovili da njihovo kretanje opisuje Diracova jednačina, postoji još elementarnih čestica koje spadaju u fermione, odnosno čestica sa spinom 1/2.

Fermioni se prema Standardnom modelu dijele u dvije kategorije, a to su kvarkovi i leptoni. Kvarkova ima šest (u, d, s, c, b i t) koji zajedno sa svojim antikvarkovima grade dvije grupe kompozitnih čestica. Prvu grupu čine barioni građeni od tri kvarka čiji su predstavnici neutron i proton. Drugu grupu čine mezoni (grade ih kvark i antikvark) poput π mezona o kojem je bilo više govora u sekciji o Klein-Gordonovom polju. Kvarkovi su grupisani u tri generacije. Prvu generaciju čine u i d, drugu generaciju čine b i t, a treću s i c kvarkovi.

S druge strane, postoje i tri generacije leptona. To su: elektron, mion i tau lepton, sa svojim odgovarajućim neutralnim parom, od posebne važnosti za moj rad, *elektronskim*, *mionskim* i *tau neutrinom*, respektivno.

Neutrini su električki neutralne elementarne čestice koje označavamo sa grčkim slovom ν. Prva generacija je elektronski neutrino ν_e, druga generacija je mionski neutrino ν_μ, a treća je tau neutrino ν_τ.

3.5.1 Otkriće neutrina

Neutrini su predloženi kao čimbenik koji nedostaje da bi se u potpunosti objasnio β radioaktivni raspad. Naime, u ovom raspadu, koji se dešava na Suncu i u nuklearnim reaktorima, dolazi do transformacije nestabilnog radioaktivnog jezgra A u radioaktivno jezgro B, pri čemu se emituje elektron.

$$A \to B + e^-. \tag{153}$$

Novonastali elektron, kao električki naelektrisana čestica se dalje lako detektuje, kao što se i mjeri njegova energija i impuls.

Međutim, na samom početku je uočeno da u ovom radioaktivnom raspadu nisu očuvani zakoni održanja energije, impulsa i ugaonog momenta.

Da bi razriješio ove probleme, Wolfgang Pauli je 1930. godine predložio da se u ovom raspadu pored elektrona emituje i još jedna čestica, koja bi nosila impuls i energiju koji su nedostajali. Obzirom da se osim elektrona nijedna druga čestica u ovom raspadu nije mogla detektovati, Pauli je predložio da to bude neutralna čestica, jako male mase (istog reda kao i masa elektrona) i spina 1/2 tako da poštuje Paulijev princip isključivosti.

$$n \to p + e^- + \bar{\nu}_e. \tag{154}$$

Pauli je ove čestice prvobitno nazvao neutronima, međutim, kada je James Chadwick otkrio mnogo masivnije neutralne čestice 1932. godine i nazvao ih također neutronima, nastala je zabuna.

Problem oko imena razriješio je Enrico Fermi kada je razvio teoriju β raspada, rekavši da se neutralna čestica koja učestvuje u ovom raspadu zove neutrino, što na talijanskom, u bukvalnom prijevodu znači *mali neutralni*.

3.5.2 Detekcija neutrina

Budući da su neutrini električki neutralni i ne intereaguju sa elektromagnentim poljem, tek je kasnih pedesetih godina prošlog stoljeća tehnologija dovoljno uznapredovala da se neutrini mogu detektovati. Kako na neutrine djeluju samo slaba sila jako kratkog dometa i gravitaciona sila, njihov prolazak kroz materiju ostaje neprimjećen. Neutrini veoma teško stupaju u interakciju sa materijom kroz koju prolaze. To potvrđuje sama činjenica da svake sekunde kroz jedan kvadratni centimetar Zemljine površine prođe oko 65 miliona neutrina koji vode svoje porijeklo sa Sunca.

Neutrine su prvi put eksperimentalno detektovali 1956. godine Clyde Cowan i Frederick Reines, koji su za svoje otkriće dobili i Nobelovu nagradu. U ovom eksperimentu, danas poznatom pod imenom Cowan-Reines neutrino eksperiment, dolazilo je do sudara između protona i antineutrina stvaranih β raspadom u nuklearnom reaktoru:

$$\bar{\nu}_e + p \to n + e^+. \tag{155}$$

U ovom raspadu su nastali neutron i pozitron. Pozitroni bi se dalje anhilirali sa elektronima, emitujući dva fotona, a neutron bi se sudario sa jezgrom, također emitujući jedan foton. Sva tri detektovana fotona nastala u ova dva procesa su značila da je prvobitno došlo do interakcije antineutrina i protona.

Kako su Cowan i Reins došli do eksperimentalne potvrde postojanja neutrina dvije i pol godine prije Paulijeve smrti, kada je saznao za novosti, Pauli je napisao: "Thanks for the message. Everything comes to him who knows how to wait. Pauli"[9].

Neutrini vode porijeklo iz različitih izvora, poput: termonuklearnih reakcija unutar Sunca i drugih zvijezda, akceleratora, nuklearnih reaktora i eksplozija supernova, od kojih su najinteresantniji tzv. solarni neutrini koji vode porijeklo od Sunca. Za njih je vezan i problem nastao šezdesetih godina prošlog vijeka kada se shvatilo da samo trećina neutrina koji dolaze sa Sunca ulaze u Standardni model. Postavilo se pitanje gdje je ostatak neutrina predviđenih ovim modelom. Ovaj problem je ostao nerazjašnjen narednih tridesetak godina, a razriješile su ga: neutrino oscilacije i masa neutrina.

3.5.3 Neutrino oscilacije

Neutrino oscilacije su u potpunosti kvantni efekat. U ovom procesu se dešavaju oscilacije između dva ili više tipova elementarnih čestica, tj. dešava se da čestica spontano i periodično transformira u jedan ili više tipova drugih čestica. Odnosno, da se elektronski neutrino transformiše u mionski ili tau neutrino. Kako su ove oscilacije moguće samo za čestice koje imaju masu možemo zaključiti da neutrini nisu bezmasivni[10].

---

[9] Prijevod: "Hvala na poruci. Sve se ostvari onome koji zna čekati. Pauli"

[10] Problem mase neutrina će biti objašnjen u kasnijim odjeljcima.

Osoba koja je zaslužna za metamatičku formulacija opisa ovih oscilacija je Bruno Pontecorvo, čiji su rad dalje razvila tri naučnika: Mikheyev, Smirnov i Wolfstein, formulišući tzv. MSW efekat. Ovaj efekat nam kaže da se osilacije ukusa neutrina mogu modificirati kada se neutrini prostiru kroz materiju. MSW efekat je zbog toga izuzetno bitan za shvatanje osobina i informacija koje solarni neutrini nose sa sobom, jer oni na putu ka detektorima na Zemlji prolaze kroz gustu solarnu koru i Zemljinu atmosferu.

Počevši od 1998. godine mnogi eksperimetni su pokazali da solarni i atmosferski neutrini mijenjaju svoje ukuse, odnosno osciluju. To znači da neutrino koji je stvoren sa određenim ukusom (elektronski, mionski ili tau neutrino) kasnije može imati drugi ukus.

Ovim je problem solarnih neutrina u Standardnom modelu bio riješen, jer se pokazalo da se dio elektronskih neutrina koji su nastali na Suncu pretvorio u druga dva tipa neutrina koje eksperimenti ranije nisu mogli detektovati.

Jedan od najvažnijih eksperimenata u području solarnih neutrina je SNO (Sudbury Neutrino Observatory), smješten u Kanadi. U ovom eksperimentu, detektor je izgrađen s ciljem da detektuje solarne neutrine koji intereaguju sa velikim rezervoarom teške vode koji omogućava detekciju svih tipova neutrina. U njemu se posmatralo plavičasto svjetlo poznato kao Cherenkovo zračenje[11] koje je nastalo kao rezultat kretanja elektrona u teškoj vodi D_20, emitovanih usljed interakcije neutrina sa teškom vodom (neutrino pretvara neutron u deuteriju u proton, pri čemu se emituje elektron).

3.6 Weyl fermioni

Do sada sam u svom radu na više mjesta uvela pojam *Weyl fermion*, te bih u ovoj sekciji voljela da se posvetim ovim česticama i da na jednom mjestu objasnim šta oni zapravo predstavljaju.

Vidjeli smo da je Dirac svoju jednačinu

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\Psi = 0 \tag{156}$$

izveo 1928. godine prvobitno imajući u vidu elektrone. Mi danas znamo da Diracova jednačina ne opisuje samo elektrone, nego opisuje i sve ostale masivne fermione, tj. sve čestice sa masom koje imaju spin 1/2.

[11] Cherenkovo zračenje je elektromagnetno zračenje plavičaste boje koje nastaje kada čestica prođe kroz neki medij brzinom većom od brzine svjetlosti u tom mediju. Tada se stvara talas konusnog oblika, čiji je vrh u izvoru zračenja čestice. Mjerenjem ugla ovog konusa možemo izmjeriti i brzinu čestice. Ovo zračenje je dobilo ime po ruskom naučniku Pavel Alekseyevich Cherenkovu, koji je 1958. godine dobio Nobelovu nagradu za njegovu detekciju.

Interesantno pitanje se postavlja kako opisati fermione koji nemaju masu. Odgovor na ovo pitanje stiže godinu dana poslije, od strane Hermanna Weyla[12], koji nakon dugog niza godina rada na području simetrija i teorija grupa publikuje mnogo jednostavniju jednačinu od Diracove.

Ova jednačina, danas poznata kao Weylova jednačina, vrijedi za slučaj fermiona bez mase. Izuzmemo li maseni član iz Diracove jednačine dobivamo Weylovu jednačinu koja glasi

$$\gamma^\mu \partial_\mu \psi = 0. \tag{157}$$

Za razliku od Diracove jednačine, čije je rješenje četvorokomponentni Diracov spinor, rješenje Weylove jednačine je Weylov dvokomponentni spinor ψ.

Obzirom da su za fermione bez mase dobro definisane i kiralnost i helicitet, može se govoriti o ljevorukim i desnorukim Weylovim fermionima, pa samim tim postoje i dva Weylova spinora ψ_L i ψ_R, respektivno.

Kako smo vidjeli u odjeljku o reprezentacijama Lorentzove grupe $SO(3,1)$, rješenje Diracove jednačine je reducibilna reprezentacija Lorentzove grupe i može se razložiti kao

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix}, \tag{158}$$

tako da se jasno vidi da je Diracov spinor sastavljen od dva Weylova spinora koji se transformiraju pod reprezentacijama $(1/2, 0)$ i $(0, 1/2)$. Pri tome se Weylov spinor ψ_L transformiše u odnosu na reprezentaciju $(1/2, 0)$, a ψ_R u odnosu na reprezentaciju $(0, 1/2)$.

Iz ovoga možemo povući veoma bitan zaključak, da je veoma korisno služiti se ireducibilnim fermionskim poljima, tj. Weylovim poljima, jer su ona gradivne jedinice svih ostalih fermionskih polja. Opšta četvorodimenzionalna reprezentacija je direktna suma ove dvije ireducibilne reprezentacije $(1/2, 0)$ i $(0, 1/2)$.

Prilikom rada sa Weylovim fermionima, korisno je služiti se kompaktnijom notacijom, tzv. *dvokomponentnom reprezentacijom* koja se još naziva i Weylovom kiralnom reprezentacijom.

U ovoj reprezentaciji, γ^μ matrice su date kao

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \gamma^j = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^j \\ -\sigma^j & 0. \end{pmatrix}, \tag{159}$$

[12]Hermann Weyl (9.11.1885-8.10.1955.) je njemački teoretski fizičar i jedan od najutjecajnijih matematičara 20-tog stoljeća. Napravio je teoriju kompaktnih grupa, tako da se može razumjeti simetrija kvantne mehanike, uključivši spinore. Doktorat je radio pod mentorstvom Davida Hilberta. Napustio je Evropu 1933. godine nakon jačanja nacističkog pokreta, te se nastanio na Princetonu na Institutu za napredne studije na kojem je radio i Dirac.

a matrica γ^5 kao

$$\gamma^5 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{160}$$

Uzmimo dakle, česticu sa spinom $1/2$ opisanu sa četvorokomponentnim Diracovim spinorom podijeljenim na dva Weylova spinora i uvrstimo je u Diracovu jednačinu, tako da ona poprima oblik

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\Psi = \begin{pmatrix} -m & i(\partial_0 + \vec{\sigma}\cdot\vec{\nabla}) \\ i(\partial_0 - \vec{\sigma}\cdot\vec{\nabla}) & -m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} = 0. \tag{161}$$

Vidimo da se Weylovi spinori kombinuju u Diracovoj jednačini preko masenog faktora. Prema tome, za slučaj kada imamo bezmasivne fermione, opisivat će ih Weylove jednačine:

$$i\left(\partial_0 - \vec{\sigma}\cdot\vec{\nabla}\right)\psi_L = 0, \tag{162}$$

$$i\left(\partial_0 + \vec{\sigma}\cdot\vec{\nabla}\right)\psi_R = 0. \tag{163}$$

Definišemo li matrice dimenzija 2×2, $\sigma^\mu = (1, \vec{\sigma})$ i $\bar{\sigma}^\mu = (1, -\vec{\sigma})$, tako da je

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix}, \tag{164}$$

možemo Diracovu jednačinu napisati u kompaktnijoj formi

$$\begin{pmatrix} -m & i\sigma\cdot\partial \\ i\bar{\sigma}\cdot\partial & -m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} = 0. \tag{165}$$

Tada Weylove jednačine u ovoj notaciji postaju

$$i\bar{\sigma}\cdot\partial\psi_L = 0 \qquad i\sigma\cdot\partial\psi_R = 0. \tag{166}$$

Dvokomponentna reprezentacije je korisna i za Majorana fermione. Međutim, za veće proračune i praktičnost je mnogo bolje koristiti se četvorokomponentnom reprezentacijom. Razlog za to se krije u činjenici da su svi električki nabijeni fermioni Diracovi fermioni za koje nam je potrebna Diracova reprezentacija, te je mnogo zgodnije koristiti se njom i za sve ostale fermione jer nema fizikalnih procesa u kojima su sve čestice Weylove ili Majoranine.

U odjeljku o neutrinima, upoznali smo se sa činjenicom da je neutrino 1930. godine predložio Pauli s ciljem objašnjenja β raspada, rekavši da su oni neutralne čestice bez mase spina $1/2$. Uvodeći ih u fiziku kao bezmasivne čestice, pretpostavilo se da ih onda opisuje upravo Weylova teorija, odnosno da su neutrini Weylovi fermioni.

Dugi niz godina se vjerovalo da su neutrini uistinu Weylovi fermioni. Prva osoba koja je pretpostavila suprotno bio je Majorana 1937. godine. On je smatrao da kako su neutrini neutralne čestice, one same sebi antičestice i ne mogu biti Weylovi fermioni. Međutim, vjerovanje da su oni zapravo Weylovi fermioni je bilo tako jako da se zadržalo i narednih dvadesetak godina.

Tek početkom 1960-tih godina, kada se javila želja i potreba za pronalaskom načina da se neutrini detektuju, shvatilo se da oni ipak imaju masu. Njihova masa nije velika, ali je ipak različita od nule što je naravno dovoljno da ih ne možemo okarakterizirati kao Weylove fermione.

Danas znamo da niti jedna eksperimentalno opažena čestica ne može biti Weylova čestica, ali se sva fermionska polja mogu izgraditi od njih. Dakle, Weyl fermioni nam služe kao gradivni blokovi svih drugih fermiona. Pomoću njih gradimo i Dirac i Majorana fermione.

3.7 Majorana fermioni

Obzirom koliko je Ettore Majorana interesantan svojim likom i djelom, posvetit ću nekoliko rečenica jednom od najvećih umova prošlog stoljeća, ujedno i tvorcu jednačine koja opisuje treću vrstu čestica koje analiziram u svom diplomskom radu, a to su neutralni masivni fermioni spina $s = 1/2$, poznatiji po imenu Majorana fermioni.

Ettore Majorana je talijanski naučnik rođen 1906. godine. Svoj prvi rad je publikovao još kao student i od početka života naučnika bavio se kvantnom teorijom polja. Na početku svoje karijere je radio u Rimu u grupi naučnika koji su djelovali pod vođstvom Enrica Fermija. Ova grupa mladih naučnika, "Via Panisperna boys" dobila je ime po ulici u kojoj se nalazio institut na kojem su radili.

Veoma bitna godina u Majoraninom životu je 1932. u kojoj je objavio rad u kojem je razvio najjednostavniju beskonačno-dimenzionalnu reprezentaciju Lorentzove grupe, koju kasnije razvija Weigner.

Majorana je uspostavio teoriju za čestice proizvoljnih spinova tako što je uopštio Diracovu jednačinu. On nije definisao šta su α^j, $j = 1, 2, 3$, i β matrice u Hamiltonijanu Diracovih čestica, i nije zahtijevao da ove matrice zadovoljavaju relaciju

$$E^2 = \vec{p}^{\,2} + m^2, \tag{167}$$

za svaku komponentu Diracovog spinora. Majorana je ustanovio da će se predznak $\pm$ eliminisati ako uzmemo Diracov spinor sa beskonačno mnogo komponenti, koji se ne može razdvojiti na konačne spinore.

Interesantno je da je Majorana prvi predložio ideju o čestici koja je neutralna i ima masu blisku masi protona, ali je bio izuzetno lijen da napiše rad o tome. Fermi ga je upozoravao da to treba da uradi, ali on to nije učinio. Umjesto njega, to je učinio Chadwick, koji je dobio i Nobelovu nagradu za otkriće neutrona.

Na nagovor Fermija 1933. godine Majorana odlazi da radi u Njemačku. Međutim, u Njemačkoj u tom periodu jačaju nacističke sile, te se zbog narušenog zdravlja i političke situacije na jesen vraća u Italiju. Po povratku u rodnu zemlju, u potpunosti se zatvara u svoju samoću. Duge četiri godine je prestao komunicirati sa ljudima, prijateljima i porodicom. Prestao je publikovati radove i izmakao se iz svijeta fizike.

Obzirom na ime i reputaciju koju je imao, prihvatili su ga da radi kao redovni profesor na Univerzitetu u Napulju gdje objavljuje i svoj posljednji rad o simetričnosti teorije elektrona i pozitrona.

Bez obzira na ponovni povratak u nauku i resocijalizaciju, nažalost, dešavanja u posljednje četiri godine njegovog života kulminirala su Majoraninim nestankom čije okolnosti unatoč brojnim istragama ni danas nisu utvrđene.

Naime, 1937. Majorana je odlučio posjetiti svog kolegu profesora koji je otišao na odmor na Siciliju sa svojom ženom. Prema nekim špekulacijama, on je povodom ovog putovanja uzeo sve svoje lične stvari, kao i novce iz banke. Zanimljivo je da je prijatelj, kojeg je išao posjetiti u Palermo, bio Židov koji je u međuvremenu pobjegao u SAD, bježeći od jačanja snaga fašista i nacista.

Zna se da je Majorana stigao na Siciliju, ali mu se gubi svaki trag na povratku sa putovanja iz Palerma. On nikada nije stigao nazad kući u Napulj.

Zbog veoma sumnjivih okolnosti pod kojima je nestao, postoje i razne teorije šta se s njim uistinu dogodilo. Neke od mogućnosti njegovog nestanka su i samoubistvo i ubistvo. Mnogi smatraju da je sebi oduzeo život zbog povučenosti i nezadovoljstva u kojem je živio posljednjih godina. S tim su povezane i mogućnosti odlaska u samostan i bijega u Argentinu. Njima u prilog idu i prethodni događaji zbog kojih se iz Njemačke vratio nazad u Italiju.

Postoje i druge teorije koje dodatno prave misteriju oko imena Ettore Majorana, poput kidnapovanja, pa čak i ubistvu kako bi ga se spriječilo da učestvuje u stvaranju atomske bombe.

Proglašen je mrtvim 27.3.1938. godine. Od tada su napisane mnoge knjige o njegovom nestanku, ali i pokrenute nove policijske istrage. Posljednja od njih datira iz 2011. godine.

Sva Majoranina otkrića priznata su tek godinama kasnije. Razlog tome je bila činjenica da je bio previše ispred svoga vremena. Genije. Pauli je jednom prilikom rekao da je, iako ga je sam teško razumio, sve što je radio bilo i više nego dobro.

Danas se u njegovu čast svake godine dodjeljuje nagrada za fizičare koja nosi njegovo ime, popularna Majoranina medalja.

Majorana je bio prvi koji je shvatio da u Klein-Gordonovoj i Diracovoj jednačini imamo opise različitih spinova! Do tada je vladalo vjerovanje da se one odnose na čestice koje imaju iste vrijednosti spina.

Već sam spomenula da je 1937. godine predložio da neutrini kao neutralne čestice mogu biti same sebi antičestice, što znači da onda ne mogu biti Weylove čestice. Međutim, Majorana je bio daleko ispred svog vremena u načinu razmišljanja, tako da se niko nije pretjerano obazirao na to. Isuviše je bilo rasprostranjeno mišljenje da su neutrini Weylove čestice, koje je dominiralo i dvadesetak godina nakon što je Weyl objavio svoju teoriju.

Majorana fermioni su veoma interesantni objekti. Iako su jednostavniji od Diracovih fermiona, Palash ih u svom članku [11] poredi sa Alisom u Zemlji čuda, jer rad s njima uvijek donese nova iznenađenja.

Majorana fermioni su masivni fermioni, dakle čestice spina $s = 1/2$ koje imaju masu. Kao što sam navela u uvodu, oni su električki neutralne čestice, za koje je Majorana predložio da su kao takve same sebi antičestice. To možemo vidjeti ako uzmemo Diracovu jednačinu za česticu Ψ i njezinu antičesticu $\hat{\Psi}$ koju smo dobili diskretnom simetrijom konjugacije naboja (čestica prelazi u antičesticu i obrnuto):

$$\hat{\Psi} = \gamma^0 C \Psi^*, \tag{168}$$

gdje je C unitarna i antisimetrična matrica, za koju vrijedi $C^* = -C^{-1}$.

Sada posmatramo slijedeće jednačine

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \ \Psi = m\hat{\Psi}, \tag{169}$$

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \ \hat{\Psi} = m\Psi, \tag{170}$$

gdje je m Majoranina masa. Ukoliko je ispunjen *uslov realnosti* koji nalaže da je

$$\Psi = \hat{\Psi}, \tag{171}$$

govorimo o Majorana fermionima. Da ne bi bilo zabune sa Diracovim fermionima, Majorana fermione ćemo obilježavati sa ψ za čestice, odnosno sa $\hat{\psi}$ za antičestice.

Vidimo da Majorana jednačina opisuje dvije vrste čestica. Prva od njih je neutralna čestica ψ, a druga je njezina, također neutralna, antičestica $\hat{\psi}$. Kako Majorana čestice ispunjavaju uslov realnosti, odnosno da je $\psi = \hat{\psi}$ dolazimo do zaključka da su one same sebi antičestice.

Kako je kvantna teorija polja zasnovana na Lorentz invarijantnosti, i znamo da je ψ Lorentz invarijantna, bitno je napomenuti da se i $\hat{\psi}$ pod

Lorentzovim transformacijama transformiše kao i ψ, što i sam uslov realnosti onda čini Lorentz invarijantnim.

Majorana fermioni su danas postali poznati i zbog supersimetrija opisanih u superprostoru. U njemu postoje neki fermionski parametri koji se transformišu upravo kao Majorana spinori.

Pored supersimetrija, Majorana fermioni imaju značajno mjesto i u fizici čvrstog stanja. Tačnije u supervodičima. Naprimjer, 2012. godine nizozemski tim uspio je konstruirati takav uređaj u kojem imamo jednu tanku žicu i supervodič s kojim će se moći otkriti čestica koja se ponaša poput Majorana čestica. Međutim, potrebno je puno provjere i rada na ovom polju da bi se to i dogodilo.

3.8 Diskretne simetrije

Svaka relativistička teorija mora biti invarijantna u odnosu na Lorentzove transformacije i diskretne simetrije. Općenito govoreći, simetrije su operacije koje kada izvršimo sistem ostaje invarijantan u odnosu na njih. Postoji mnogo primjera simetrija u prirodi, odnosno operacija koje možemo izvršiti nad sistemima, poput translacija u vremenu, translacija u prostoru, rotacija i slično. Za simetrije je vezan veoma bitan teorem, poznatiji pod imenom Noetherin teorem iz 1917. godine koji kaže da ukoliko imamo simetriju, iz nje slijedi zakon očuvanja. Pa tako, naprimjer, ukoliko imamo simetričnost zakona fizike u odnosu na translacije u vremenu, što znači da su isti bez obzira u kojem vremenu ih posmatrali, slijedit će zakon očuvanja energije. Za simetričnost u odnosu na translacije u prostoru imamo očuvan impuls čestice, a za simetričnost u odnosu na rotacije ugaoni momenat. Dakle, kada izvršimo simetriju u odnosu na neku operaciju nad sistemom i on ostaje isti, onda je sistem simetričan u odnosu na tu operaciju.

Simetrije zadovoljavaju osobine grupe, što znači da njezini elementi zadovoljavaju četiri osobine: postojanje jediničnog i inverznog elementa, asocijativnost i zatvorenost. Kao i kod ostalih grupa, najuobičajenija reprezentacija elemenata grupe simetrija je matrična reprezentacija.

Interesantna je invarijantnost interakcija u prirodi u odnosu na ove simetrije, a pogotovo u odnosu na diskretne (nekontinuirane) simetrije, kao što su: vremenska inverzija T, parnost P i konjugacija naboja C. Prvo ćemo vidjeti kako one pojedinačno djeluju, a kako istovremeno.

3.8.1 Inverzija vremena

Inverzija vremena je diskretna simetrija u kojoj dolazi do prelaza $t \to -t$, odnosno

$$\psi(t, \vec{x}) \to \psi(-t, \vec{x}). \tag{172}$$

Inverzija vremena ili T-simetrija utječe samo na vremensku koordinatu, a prostorne ostavlja nepromijenjenim. Prema tome, Weigner je 1932. godine pokazao da se ona može predstaviti unitarnim operatorom,

$$T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{173}$$

Inverzija vremena ili T-simetrija je veoma komplikovana za dokazati. Dosadašnji eksperimenti su pokazali da je očuvana i za gravitacionu i za elektromagnetnu i za jaku i za slabu interakciju.

3.8.2 Parnost

Parnost ili prostorna inverzija naziva se još i *zrcalnom simetrijom*. To je takva simetrija koja djelujući na dati proces daje njegovu sliku u ogledalu, odnosno govori nam da je fizikalni proces u ogledalu također moguć. Parnost djeluje samo na prostorne koordinate, tj. ostavlja vremensku koordinatu nepromijenjenu. Pod parnošću dolazi do transformacije prostornih koordinata tako što $(t, \vec{x}) \to (t, -\vec{x})$.

Operator parnosti P je unitarni operator dimenzija 4×4, dat kao γ^0 matrica u Weylovoj bazi

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{174}$$

pa i za operator parnosti vrijede iste relacije kao i za γ^0 matricu, odnosno vrijedi da je $P^2 = 1$, što nam govori da ako dva puta upotrijebimo parnost, vratit ćemo se u prvobitno stanje.

Kako pravi inverziju prostornih koordinata, parnost pravi i inverziju impulsa čestice, ali ne mijenja njezin spin. To možemo matematički formulisati na slijedeći način, upotrebom dva stanja

$$a(p, s)|0> \to a(-p, s)|0> . \tag{175}$$

Samim tim, parnost mijenja orijentaciju impulsa i spina date čestice, što znači da se mijenja i helicitet čestice. Čestica sa negativnim helicitetom pod djelovanjem parnosti prelazi u česticu sa pozitivnim helicitetom i obrnuto.

Uzmimo Diracov spinor predstavljen preko Weylovih spinora, zanima nas šta se dešava kada na njega djelujemo operatorom parnosti. Pod parnošću imamo da

$$\begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_R \\ \psi_L \end{pmatrix} \tag{176}$$

iz čega vidimo da je parnost zadužena za promjenu kiralnosti. Ona ljevoruka kiralna polja prevodi u desnoruka kiralna polja i obratno,

$$\psi_L \leftrightarrow \psi_R. \tag{177}$$

Dvojica teorijskih fizičara Lee i Yang su se bavila pitanjem očuvanja parnosti 50-tih godina prošlog stoljeća. Oni su pokazali da je, kada su u pitanju interakcije u prirodi koje su uključene u Standardni model, parnost očuvana u elektromagnetnim i jakim interakcijama, međutim pretpostavili su da to nije slučaj i za slabe interakcije. Sa ovom hipotezom su se obratili fizičarki C. S. Wu s ciljem da eksperimentalno dokažu narušenje parnosti u slabim interakcijama, što je Wu i učinila 1957. godine. Eksperiment se sastojao od proučavanja β raspada atoma izotopa kobalta ^{60}Co ohlađenih na temperaturu apsolutne nule i usmjerenih pomoću magnetnog polja.

Pri ovom raspadu ^{60}Co se raspada na ^{60}Ni

$$^{60}\,\mathrm{Co} \to^{60}\,\mathrm{Ni} + e^- + \bar{\nu}_e, \tag{178}$$

pri čemu se emituju elektron i elektronski antineutrino. U ovom eksperimentu se očekuje da su projekcije spina emitovanog elektrona i $\bar{\nu}_e$ u pravcu projekcije spina ^{60}Co. Eksperiment je pokazao da su elektroni uvijek emitovani u pravcu suprotnom od smjera projekcije spina nukleusa izotopa kobalta, što znači da svi emitovani elektroni imaju negativan helicitet. Kako invarijantnost u odnosu na parnost nalaže podjednaku prisutnost pozitivnih i negativnih heliciteta ovo znači da je ona narušena u slabim interakcijama.

Najveće narušenje parnosti u prirodi imamo za slučaj neutrina. Naime, eksperimenti koje možemo izvršiti pokazuju da su svi neutrini u prirodi ljevoruki, a antineutrini desnoruki. Oni nam pokazuju da ne postoje desnoruki neutrini, niti ljevoruki antineutrini, što nam opet, daje maksimalno narušenje parnosti.

3.8.3 Konjugacija naboja

Konjugaciju naboja ili C-simetrija fermion određene orijentacije spina prevodi u antifermion iste orijentacije spina, tj. daje nam vezu između spinora koji opisuju čestice i antičestice. Konjugacija naboja mijenja sve unutrašnje kvantne brojeve, ali masu, energiju i spin ostavlja netaknutima. Matematički formulisano imamo da je:

$$Ca(p,s)C \to b(p,s), \tag{179}$$

$$Cb(p,s)C \to a(p,s), \tag{180}$$

kada $a(p,s)$ predstavlja česticu, a $b(p,s)$ antičesticu impulsa p i spina s. Ako zamijenimo sva fermionska polja sa njihovim kompleksno konjugovanim poljima i sve ostane nepromijenjeno, imat ćemo očuvanje C-simetrije.

C-simetrija je očuvana u elektromagnetnim i jakim interakcijama, ali u slabim nije. Slabe interakcije narušavaju C-simetriju, što znači da kada konjugaciju naboja primijenimo na neutrino koji je ljevoruk, trebali bi dobiti antineutrino koji je također ljevoruk. Međutim, to se neće desiti, jer do sada nismo uspjeli detektovati ljevoruke antineutrine, nego samo desnoruke.

3.8.4 CP i CPT simetrije

Vidjeli smo da su gravitaciona, elektromagnetna i jaka interakcija invarijantne u odnosu na T, P i C-simetrije, a da u slučaju slabih interakcija, odgovornih za β raspade i nastanak neutrina, dolazi do narušenja P i C simetrije. Do sada spomenute diskretne simetrije se mogu kombinovati i važno je da vidimo kako one djeluju na fermionska polja.

Kada posmatramo CP simetriju, koja se sastoji od parnosti (prostorne refleksije) i konjugacije naboja, dolazi do prelaska ljevoruke čestice u desnoruku antičesticu.

$$CP\Psi(t,\vec{x})(CP)^{-1} = \eta_c \gamma_0 \hat{\Psi}(t,-\vec{x}), \tag{181}$$

gdje je η_c fazni faktor. Ova simetrija predstavlja savršenu simetriju između materije i antimaterije. Ona je narušena u jakim interakcijama, što nam omogućava da proučavamo asimetričnost količine materije i antimaterije u svemiru. Iako slabe interakcije narušavaju C-simetriju i parnost, one ne narušavaju CP simetriju. Uzmemo li ljevoruki neutrino i djelujemo CP simetrijom, proizvest ćemo desnoruki antineutrino, koje smo u stanju detektovati u prirodi, tako da je ova CP simetrija, simetrija slabih interakcija.

Međutim, bez obzira koju od ovih simetrija ili kombinacija simetrija narušavali, postoji teorem koji kaže da svako Lorentz-invarijantno polje održava CPT simetriju. Ona je sačuvana u svim poznatim interakcijama. Bez CPT simetrije bi cijela kvantna teorija polja bila neispravna. Do sada nismo napravili nijedan eksperiment koji je pokazao narušenje ove simetrije, pa se ona smatra simetrijom svakog procesa u prirodi. Ako je ispravna, onda svaka čestica treba imati istu masu i životni vijek kao njezina antičestica.

4 Fenomenološke razlike Dirac i Majorana čestica

Nakon proučavanja jednačine koja opisuje čestice spina $s = 1/2$, možemo doći do veoma bitnog zaključka vezanog za Diracovu jednačinu

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\Psi(\vec{x}, t) = 0. \tag{182}$$

Ova jednačina ima više rješenja. Rješenje s kojim smo se prvo upoznali jeste Diracovo četvorokomponentno polje $\Psi(\vec{x}, t)$ za koje smo vidjeli da nema nikakvih ograničenja. Međutim, ako uzmemo u obzir određena ograničenja, dobit ćemo još jednostavnija rješenja ove jednačine. Ograničenja o kojima je riječ su: *uslov realnosti* i *uslov kiralnosti.* Naravno, mi ih ne možemo istovremeno postaviti, jer polja koja njima dobivamo nemaju zajedničkih osobina.

Uzmemo li u obzir uslov kiralnosti, koji smo do sada razmatrali u sekciji o Weylovim fermionima, rješenje Diracove jednačine će biti Weylova bezmasivna kiralna polja ψ_L i ψ_R. Dok, s druge strane, korištenjem uslova realnosti $\psi = \hat{\psi}$ dobivamo Majorana masivno polje.

Dakle, i Diracovo i Weylovo i Majoranino polje su rješenja Diracove jednačine za čestice spina $s = 1/2$. To znači da su ova tri polja moguća stanja elementarnih čestica sa polucjelobrojnim spinom.

4.1 Dirac i Majorana fermioni iz Weyl fermiona

Kako smo vidjeli, Weylovi fermioni nam služe za izgradnju ostalih fermionskih polja, pa ću nastojati objasniti način na koji ona grade Majorana i Diracovo polje. Kako su Weylovi fermioni bezmasivni, najvažnije je ustanoviti način na koji Dirac i Majorana fermioni dobivaju masu, odnosno kako se generiše maseni član u Lagranžijanu pomoću bezmasivnih Weylovih polja. Ovim ću pokazati neke od fenomenoloških razlika između Dirac i Majorana fermiona.

4.1.1 Dirac fermioni

Prvo nas zanima kako se Diracovo polje gradi pomoću Weylovih polja. Ovo je mnogo jednostavniji slučaj od gradnje Majorana polja utoliko što Diracovo polje nema nikakvih ograničenja. Gustoća Lagranžijana ovog polja je data relacijom

$$L = \bar{\Psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\Psi, \tag{183}$$

koju možemo napisati i na drugačiji način, ako Ψ razložimo na njegove ljevoruke i desnoruke kiralne komponente, Ψ_L i Ψ_R, respektivno. Kako smo već vidjeli u sekciji o kiralnosti, gustoća Lagranžijana postaje

$$L = m\bar{\Psi}_R\Psi_L + m\bar{\Psi}_L\Psi_R + \bar{\Psi}_L i\gamma^\mu\partial_\mu\Psi_L + \bar{\Psi}_R i\gamma^\mu\partial_\mu\Psi_R. \tag{184}$$

Iz gustoće Lagranžijana smo zaključili da se masa generiše tako što imamo interakciju ljevorukih i desnorukih kiralnih komponenti, odnosno da je maseni član taj koji miješa ljevoruke i desnoruke kiralne komponente. Dakle, da dobijemo maseni Diracov fermion, pomoću Weylovih polja, moramo uzeti dva nezavisna Weylova spinora, ψ_{L1} i ψ_{L2}. Na osnovu svega do sada izloženog, dobivamo da Diracovo polje mora biti definisano kao

$$\Psi = \psi_{L1} + \psi_{R2} \tag{185}$$

suma dva Weylova polja različitih kiralnosti.

4.1.2 Majorana fermioni

Posmatrajmo sada kako je Majorana polje građeno od Weylovog polja. Za njegovu izgradnju ćemo također uzeti dva Weylova spinora, ljevoruki ψ_L i desnoruki ψ_R kiralni spinor s ciljem da generišemo maseni član Majorana fermiona. Međutim, kada su u pitanju Majorana fermioni, imamo ograničenje, tj. mora biti ispunjen zahtjev realnosti koji ih definiše

$$\psi = \hat{\psi}. \tag{186}$$

Znači da moramo ukombinovati dva Weylova spinora sa dvije različite kiralnosti na način da zadovoljavaju uslov realnosti. Znamo da kada djelujemo projekcionim operatorom P_R na lijevoruko kiralno Weylovo polje dobivamo

$$P_R\psi_L = 0, \tag{187}$$

odnosno da je

$$\frac{1}{2}(1-\gamma^5)\psi_L = 0, \tag{188}$$

kada koristimo Weylovu bazu za reprezentaciju γ^5 matrice. Ukoliko kompleksno-konjugujemo ovu jednačinu i s lijeva je pomnožimo sa $\gamma^0 C$, slijedi

$$\gamma^0 C(1-(\gamma^5)^*)\psi_L^*, \tag{189}$$

pri čemu vrijedi da je $(\gamma^5)^* = (\gamma^5)^T$ hermitska matrica. Također vrijedi da je $C^{-1}\gamma^5 C = (\gamma^5)^T$ iz čega slijedi $C(\gamma^5)^T = \gamma^5 C$.

Uvrstimo li dobivene rezultate u jednačinu, imat ćemo da je

$$\gamma^0(1-\gamma^5)C\psi_L^* = 0. \tag{190}$$

Obzirom da matrice γ^0 i γ^5 antikomutiraju, slijedi

$$(1+\gamma^5)\psi_R = 0, \tag{191}$$

gdje je $\gamma^0 C\psi_L^* = \psi_R$ desnoruko kiralno Weylovo polje dobiveno kompleksnom konjugacijom ljevorukog polja. Dakle, ako kompleksno konjugujemo ljevoruko Weylovo polje, dobit ćemo desnoruko, čime smo utvrdili da su Majorana čestice same sebi antičestice, odnosno da je ispunjen uslov realnosti. Majoranino polje sada možemo definisati putem relacije

$$\psi = \psi_L + \psi_R. \tag{192}$$

4.2 Dvokomponentna notacija

Pomoću dvokomponentne notacije ću na vrlo jednostavan način formulisati sve što sam do sada u ovom poglavlju rekla. Da ne bi bilo zabune, Diracov spinor ću označiti sa Ψ_D, a Majoranin sa Ψ_M gdje indeksi D i M označavaju o kojem je fermionu riječ. U ovoj notaciji, koristit ću se sa dva Weylova spinora, ljevorukim ψ, kojeg smo do sada označavali sa indeksom L i desnorukim χ.

Kao što smo vidjeli, maseni član gustoće Lagranžijana za Diracov fermion možemo napisati koristeći dva nezavisna ljevoruka Weylova polja ψ i χ, tako što ćemo Diracov spinor predstaviti na slijedeći način

$$\Psi_D = \begin{pmatrix} \psi \\ -i\bar{\sigma}^2\chi^* \end{pmatrix}, \tag{193}$$

gdje je $-i\bar{\sigma}^2\chi^* = \chi^C$ desnoruki spinor dobiven kompleksnom konjugacijom ljevorukog Weylovog spinora χ. Tada dobivamo da je maseni član koji miješa ljevoruke i desnoruke komponente, dat kao

$$m_D\bar{\Psi}_D\Psi_D = \begin{pmatrix} \psi^\dagger & i\chi^T\bar{\sigma}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & m_D \\ m_D & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi \\ -i\bar{\sigma}^2\chi^* \end{pmatrix}. \tag{194}$$

S druge strane, kada su u pitanju Majorana fermioni, imamo malo drugačiju situaciju, s obzirom da Majorana fermioni imaju dva stepena slobode zbog uslova realnosti kojem se podvrgavaju. Za Majorana fermione, Majorana spinor Ψ_M je

$$\Psi_M = \begin{pmatrix} \psi \\ -i\bar{\sigma}^2\psi^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi \\ \psi^C \end{pmatrix}, \tag{195}$$

gdje vidimo da je desnoruka komponenta dobivena kompleksnom konjugacijom ljevoruke, čime je uslov realnosti zadovoljen. Maseni član gustoće Lagranžijana Majorana čestice dat je kao

$$\frac{1}{2}m_M\bar{\Psi}_M\Psi_M = \frac{1}{2}m_M(\psi^C)^\dagger\psi + \frac{1}{2}m_M\psi^\dagger\psi^C. \tag{196}$$

Dakle, da bi dobili maseni Majoranin ili Diracov fermion moramo spojiti dva Weylova polja suprotnih kiralnosti na već spomenute načine. Oni moraju imati i desnoruku i ljevoruku kiralnu komponentu, koje intereaguju u masenom članu, dok kod Weylovih bezmasivnih fermiona je dovoljna jedna ili druga komponenta, tako da maseni dio u Hamiltonijanu za Weylove čestice nestaje.

4.3 Dirac ili Majorana?

Jedno od najvažnijih pitanja moderne fizike jeste pitanje da li su neutrini Dirac ili Majorana čestice. Oni su prvobitno uvedeni kao bezmasivne čestice, jer je gornja granica za njihovu masu mnogo manja od masa drugih poznatih čestica, tako da se u tadašnjim eksperimentima nije mogla detektovati masa. Samim tim, u vrijeme kada se pravio Standardni model, neutrini su također predviđeni kao bezmasivni, odnosno nije bilo potrebe da se razmatra mogućnost da ipak imaju masu. Zbog toga kažemo da Standardni model nije potpuna teorija, nego dobra aproksimacija koja se mora proširiti.

Međutim, danas postoje mnogi teorijski i fenomenološki razlozi da se smatra da neutrini, kao i ostali fermioni, imaju masu. Uključimo li masivne neutrine u Stadardni model, neće se narušiti nikakve simetrije, jer se neutrini podvrgavaju samo slaboj interakciji, tako da to nije problem. Također, prirodnije je smatrati ih masivnim zbog teorije koja će objediniti sve četiri interakcije u prirodi, kada budemo govorili i o gravitaciji. Dakle, postoji mnogo teorijskih razloga zašto bi neutrini trebali biti masivni, ali sve zavisi od eksperimenata i kakve oni podatke donose. Kao što sam već govorila, otkriveno je da neutrini imaju masu pomoću raznih eksperimenata poput Kamiokande, Super-Kamiokande i SNO, gdje su posmatrane neutrino oscilacije. Njihova masa je jako mala u odnosu na masu kvarkova i leptona i milionima puta je manje od masa drugih fermiona[13].

Znajući da su neutrini masivni, postavlja se pitanje kakva im je priroda, da li su oni Dirac ili Majorana fermioni. Do sada smo vidjeli da su Majorana čestice takvi fermioni da su sami sebi antičestice, dok u slučaju Diracovih

[13] Postoji model nastao sedamdesetih godina koji se koristi da bi se objasnio ovaj fenomen, poznatiji kao 'mehanizam klackalice'.

čestica imamo razliku između čestica i antičestica. Samim tim, oni drugačije intereaguju sa materijom, što bi se trebalo pokazati u eksperimentima. Međutim, eksperimentalno je teško uočiti razliku između njih, jer neutrini jako slabo intereaguju sa materijom. Jedan od procesa koji bi mogao dovesti do rješenja ove zagonetke jeste dupli beta raspad. Obični dupli beta raspad je proces u kojem se dva neutrona raspadaju na dva protona, pri čemu se emituju dva elektrona i dva antineutrina:

$$(A, Z) \to (A, Z + 2) + 2e^{-} + 2\bar{\nu}_e. \tag{197}$$

Taj proces je prva opisala Maria Goeppert-Mayer 1935. godine. Do sada je posmatrano tek dvanaestak izotopa koji podliježu ovom raspadu, jer se on rijetko dešava.

Međutim, prema teoriji koju je prvi definisao Wendell Furry 1939. godine, u slučaju da je neutrino sam sebi antičestica, odnosno Majorana čestica, dupli beta raspad bi se desio bez emisije dva neutrina. Dakle, dupli beta raspad bi mogao da da odgovor da li su neutrini Majorana ili Dirac čestice, ali treba da dođe do unapređenja eksperimenatalnih tehnika kako bismo dobili odgovor na ovo pitanje.

5 Zaključak

U diplomskom radu sam pokušala pokazati kako se razvija istraživanje i produbljuju saznanja o osnovnim gradivnim jedinicama prirode — elementarnim česticama. U svrhu toga sam razmotrila nastanak i razvoj jednačina koje opisuju čestice spina 0 i čestice spina 1/2. Opis razvoja sam započela sa 20-tim godinama prošlog vijeka kada se javila potreba naučnika za formulacijom teorije koja će opisivati i objašnjavati ponašanje svih elementarnih čestica, odnosno za formulaciju kvantne teorije polja kakvu mi danas poznajemo. Pokazala sam kako su naučnici u tom periodu razmišljali i kako su se nosili sa poteškoćama na koje su nailazili i kako su pronašli elegantan i jednostavan način da matematičkim formulama opišu kretanja i interakcije čestica.

Izlaganje o Diracovom polju i Lorentzovoj grupi dovelo je do veoma bitnog zaključka. Naime, grupa $SO(3,1)$ se može reducirati na više spinskih reprezentacija, a sva fermionska polja se mogu izgraditi na osnovu Weylovih bezmasivnih polja. Time se istovremeno veoma jednostavno može prikazati kako su građeni Majorana i Diracovo polje, odnosno kakvi su odnosi i veze između Dirac, Majorana i Weyl fermiona.

Usporedba Majorana i Dirac fermiona današnjoj fizici služi kao polazište potrage za odgovorom koji nauci zadaje glavobolju, pitanje o prirodi neutrina, odnosno traženju odgovora jesu li neutrini Majorana ili Dirac fermioni.

Otkriće da su neutrini masivne čestice, usmjerilo je pažnju na Majoranine stavove stare više od pola stoljeća, što mi je postavilo i veoma zanimljivo pitanje o otkrićima koja ponekad idu daleko ispred svoga vremena, ali i o misteriji koja je vezana za ličnu sudbinu i nestanak samog Majorane.

Kako priroda neutrina još uvijek nije u potpunosti shvaćena, tako ne možemo ni dati konačan odgovor na pitanje tačnosti Dirac ili Majoranine teorije o neutrinu. Odgovor bi trebali dobiti tek u budućnosti pomoću rezultata eksperimenata koji se vrše u CERN-u i drugih eksperimenata koji su posvećeni prvenstveno neutrinskim oscilacijama i duplom beta raspadu.

Obzirom da ćemo tek u budućnosti moći odgovoriti na ovo pitanje, motivacija za moj daljnji rad na ovom polju se svakim danom povećava i željela bih biti dio zajednice teorijskih fizičara kada se to pitanje konačno razjasni.

6 Dodaci

6.1 Relativistička notacija

U relativističkoj notaciji koristimo se *kontravarijantnim* (gornjim) i *kovarijantnim* (donjim) indeksima za četvorovektore. Za prvi primjer uzet ćemo kontravarijantni četvorovektor položaja, koji se označava sa:

$$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z) = (ct, x^k) = (ct, \vec{x}) \tag{198}$$

U ovoj notaciji sa grčkim slovima označavamo komponente četvorovektora i četvorotenzora ($\mu = 0, 1, 2, 3$), a sa latinskim indeksima komponente u običnom trodimenzionalnom prostoru ($k = 1, 2, 3$).

Vezu između kontravarijantnih i kovarijantnih četvorovektora daje relacija:

$$x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu, \tag{199}$$

gdje je $g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu}$ *metrički tenzor* koji zadaje pseudoeuklidsku metriku prostoru i vremenu.

$$g = (g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{200}$$

Za metrički tenzor vrijedi da je:

$$g^{\mu\rho} g_{\rho\nu} = \delta^\mu_\nu \tag{201}$$

Kada pomnožimo matrički tenzor i kontravarijantni četvorovektor, dobit ćemo izraz za kovarijantni vektor: $x_\mu = (x_0, x_1, x_2, x_3) = (ct, -x, -y - z) = (ct, -\vec{x})$. U relativističkoj notaciji koristimo i Einsteinovu konvenciju za sumiranje po indeksima koji se ponavljaju. Tako da se proizvod dva četvorovektora može napisati kao:

$$a \cdot b = a_\mu b^\mu = a^\mu b_\mu = a^0 b^0 - \vec{a}\ \vec{b} \tag{202}$$

Četvorovektor impulsa dat je sa:

$$p^\mu = (p^0, p^1, p^2, p^3) = \left(\frac{E}{c}, p_x, p_y, p_z\right) = \left(\frac{E}{c}, \vec{p}\right) \tag{203}$$

gdje su energija E i impuls $\vec{p}$ čestice:

$$E = \gamma m c^2, \qquad \vec{p} = \gamma m \vec{v}, \qquad \gamma = \left[1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}}. \tag{204}$$

Ovaj kovarijantni četvorovektor impulsa je $p_\mu = g_{\mu\nu}p^\nu = (\frac{E}{c}, -\vec{p})$, dok je invarijantni skalarni proizvod četvoroimpulsa dat sa $p_\mu p^\mu = \frac{E^2}{c^2} - (\vec{p})^{\,2} = m^2c^4$. Na osnovu toga je energija E, koja predstavlja Hamiltonovu funkciju izraženu preko impulsa, data sa

$$E = H = \sqrt{\vec{p}^{\,2}c^2 + m^2c^4}. \tag{205}$$

Četvorodimenzionalni gradijent obilježavamo sa:

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{\partial}{c\partial t}, \vec{\nabla}\right). \tag{206}$$

Kontravarijantni gradijent je:

$$\partial^\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu} = \left(\frac{\partial}{c\partial t}, -\vec{\nabla}\right), \tag{207}$$

a d'Alambertov operator:

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^{\,2}. \tag{208}$$

6.2 Osobine gamma matrica

Diracove gamma-matrice $\gamma^\mu = (\gamma^0, \gamma^1, \gamma^2, \gamma^3)$ su matrice dimenzije 4×4 koje zadovoljavaju Kliffordovu algebru, tj. zadovoljavaju antikomutacionu relaciju:

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = \gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}. \tag{209}$$

Ove matrice se izražavaju preko Paulijevih matrica čije su dimenzije 2×2

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{210}$$

tj. Diracove gamma-matrice γ^μ su date kao:

$$\gamma^0 = \beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \gamma^j = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^j \\ -\sigma^j & 0 \end{pmatrix}. \tag{211}$$

Pri čemu je γ^0 hermitska matrica, a γ^j antihermitska matrica.

Za njih vrijede i relacije:

$$(\gamma^0)^2 = 1, \qquad (\gamma^j)^2 = -1 \tag{212}$$

i ne mijenjaju se pri Lorentzovim transformacijama.

Svaka matrica dimenzija 4×4 se može razložiti pomoću šesnaest linearno nezavisnih matrica koje su bazirane na matricama Cliffordove algebre. To uključuje i takozvanu γ^5 matricu

$$\gamma^5 = \gamma_5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3. \tag{213}$$

Ova matrica je također hermitska matrica dimenzija 4×4 i ima oblik:

$$\gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{214}$$

i komutira sa svim Diracovim matricama. Gamma matrice se mogu predstaviti u različitim bazama u zavisnosti od fizikalnih problema koje posmatramo. Navedena reprezentacija gamma matrica je takozvana Diracova baza u kojoj vidimo da je matrica γ^0 u dijagonalnoj formi. Međutim, postoji i kiralna ili Weylova baza u kojoj je γ^5 u dijagonalnoj formi

$$\gamma^5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{215}$$

koju najviše koristimo za izučavanje kiralnosti.

Ovih 16 linearno nezavisnih Γ matrica predstavljamo na sljedeći način:

$$\Gamma^s = 1 \tag{216}$$

$$\Gamma^v_\mu = \gamma^\mu, \qquad \mu = 0,1,2,3 \tag{217}$$

$$\Gamma^T_\mu \nu = \sigma_\mu \nu = \frac{1}{2}\left[\gamma_\mu, \gamma_\nu\right] \tag{218}$$

$$\Gamma^A_\mu = \gamma_5 \gamma_\mu \tag{219}$$

$$\Gamma^P = \gamma_5 \tag{220}$$

Osobine ovih matrica su:

$$(\Gamma^a)^2 = \pm 1, \tag{221}$$

njihov trag je jednak nuli i one su antisimetrične, tj.vrijedi da je:

$$\Gamma^a \Gamma^b = -\Gamma^b \Gamma^a. \tag{222}$$

One su nam od izuzetne važnosti jer se svaka 4×4 matrica može napisati kao njihova linearna kombinacija.

6.3 Lorentzove transformacije

Lorentzove transformacije uključuju dvije vrste transformacija, a to su rotacije i boostovi. Boost(eng.) se može prevesti kao pomak i predstavlja prelazak između dva koordinatna sistema koji se kreću jedan u odnosu na drugi konstantnom brzinom duž nekog pravca. Kako već znamo dejstvo rotacija na vektore u trodimenzionalnom prostoru i njima pridružene generatore potrebno je još samo da razmotrimo djelovanje boosta. Za dva sistem referencije, $S(x, y, z, t)$ i $S'(x', y', z', t')$, Lorentzove transformacije boosta duž x-ose vršimo na slijedeći način

$$x' = \gamma\,(x - vt) \tag{223}$$

$$y' = y \tag{224}$$

$$z' = z \tag{225}$$

$$t' = \gamma\left(t - \frac{\beta}{c}x\right) \tag{226}$$

gdje su koeficijenti

$$\beta = \frac{v}{c} \tag{227}$$

i

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \tag{228}$$

a v brzina kretanja sistema referencije. Ove transformacije ostavljaju interval konstantnim:

$$s^2 = (ct)^2 - x^2 - y^2 - z^2 = const.. \tag{229}$$

i djeluju u četvorodimenzionalnom prostoru Minkowskog kojeg grade Lorentzovi četvorovektori x^μ, $\mu = 0, 1, 2, 3$.

Lorentzove transformacije uključuju dvije vrste transformacija, a to su rotacije i boostovi. Boost(eng.) se može prevesti kao pomak, predstavlja prelazak između dva koordinatna sistema koji se kreću jedan u odnosu na drugi konstantnom brzinom duž nekog pravca. Uvođenjem četvorovektora u kovarijantnoj i kontravarijantnoj notaciji, za transformaciju Lorentzovim boostom duž y-ose možemo napisati

$$x^{0'} = \gamma(x^0 - \beta x^2) \tag{230}$$

$$x^{1'} = x^1 \tag{231}$$

$$x^{2'} = \gamma(x^2 - \beta x^0) \tag{232}$$

$$x^{3'} = x^3, \tag{233}$$

odnosno u kompaktnoj formi

$$\begin{pmatrix} x^{0'} \\ x^{1'} \\ x^{2'} \\ x^{3'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & -\beta\gamma & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \tag{234}$$

Analogno možemo napisati i transformacije dobivene boostom duž z-ose

$$x^{0'} = \gamma(x^0 - \beta x^3) \tag{235}$$

$$x^{1'} = x^1 \tag{236}$$

$$x^{2'} = x^2 \tag{237}$$

$$x^{3'} = \gamma(x^3 - \beta x^0). \tag{238}$$

tj.

$$\begin{pmatrix} x^{0'} \\ x^{1'} \\ x^{2'} \\ x^{3'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}. \tag{239}$$

Uvedemo li novi parametar θ tako da je

$$e^{\theta} = \gamma(1+\beta) \qquad e^{-\theta} = \gamma(1-\beta), \tag{240}$$

imat ćemo da je $\gamma = \cosh\theta$ i $\beta = \tanh\theta$. Naravno, po definiciji su

$$\cosh\theta = \frac{e^{\theta}+e^{-\theta}}{2}, \qquad \sinh\theta = \frac{e^{\theta}-e^{-\theta}}{2} \qquad i \qquad \tanh\theta = \frac{\sinh\theta}{\cosh\theta}. \tag{241}$$

Na osnovu ovoga, transformacije koje dobivamo pomoću boosta duž y-ose i z-ose, respektivno, dobivaju novi oblik:

$$B_2(\theta) = \begin{pmatrix} \cosh\theta & 0 & \sinh\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sinh\theta & 0 & \cosh\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{242}$$

$$B_3(\theta) = \begin{pmatrix} \cosh\theta & 0 & 0 & \sinh\theta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \sinh\theta & 0 & 0 & \cosh\theta \end{pmatrix}. \tag{243}$$

Sa stanovišta teorije grupa Lorentzove transformacije čine *Lorentzovu grupu* $SO(3,1)$ koja je građena od grupe rotacija $SO(3)$ i boosta. Grupa rotacija se sastoji od tri generatora, čije sam izraze dala u glavnom dijelu rada, a generatore boosta dobivamo pomoću slijedeće relacije,

$$T_i = -i\frac{\partial}{\partial\theta}B_i(\theta)|_{\theta=0}, \qquad i = 1, 2, 3. \tag{244}$$

Njih imamo tri, za boostove duž x-,y- i z-ose. Eksplicitni izrazi za generatore boosta duž y-ose i z-ose su

$$T_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{245}$$

$$T_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{246}$$

u čijim reprezentacijama jasno vidimo duž koje ose se vrši boost.

7 Bibliografija

Literatura

[1] Greiner, W.: Relativistic Quantum Mechanics, Springer, 1994.

[2] Greiner, W. i Reinhardt, J.: Field Quantization, Springer, 1996.

[3] Peskin, M. i Schroeder, D.: An Introduction to Quantum Field Theory, Perseus Books, 1995.

[4] Zee, A.: Quantum Field Theory in a Nutshell, Princeton University Press, 2003.

[5] Georgi, H.: Lie Algebras in Particle Physics; From Isospin to Unified Theories, Westview Press, 1999.

[6] Jones, H.: Groups, Representations and Physics, IOP Publishing, 1998.

[7] Griffiths, D.: Introduction to Elementary Particles, John Wiley & Sons, 1987.

[8] Basdevant, Jean-Louis: Lectures on Quantum Mechanics, Springer, 2007.

[9] Milošević, D.: Relativistička kvantna mehanika, bosniaARS, 2005.

[10] Doršner, I.: Simetrije u fizici, PMF Sarajevo, 2013.

[11] Pal, P. B.: "Dirac, Majorana and Weyl fermions," Am. J. Phys. **79** (2011.) 485 [arXiv:1006.1718 [hep-ph]]

[12] Esposito, S. : "Searching for an equation: Dirac, Majorana and the others," Annals Phys. **327** (2012.) 1617 [arXiv:1110.6878 [physics.hist-ph]]

[13] Cheng, Y. i Kong, O. C. W.: "Ambiguities and Subtleties in Fermion Mass Terms," arXiv:1305.5772 [hep-ph]